Министерство образования Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. ВОРОНИН   Б.И. МОРОЗОВ

НАДЕЖНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
2001

УДК 621.311.019

В о р о н и н А.А., М о р о з о в Б.И. Надежность информационных систем: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001, 89 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины ОПД.Ф.08 "Надежность информационных систем" подготовки дипломированного специалиста по направлению 654700-Информационные системы.

В учебном пособие даны основные понятия теории надежности. Приводятся традиционные методы анализа и расчета надежности технических систем. Рассматриваются вопросы исследования надежности с помощью логико-вероятностных методов, использующих аппарат алгебры логики и теории вероятностей. Приводятся сведения по граничной оценке показателей надежности. Дается анализ надежности систем при нечетком оценивании показателей надежности ее элементов.

Пособие предназначено для самостоятельного изучения курса и содержит необходимый для упражнений теоретический материал, полное изложение которого можно найти в изданиях, приведенных в списке литературы.

Табл. 5. Ил. 20. Библиограф.: 9 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема надежности является очень важной для современных технических систем. Можно привести примеры многих систем, для которых решение проблемы надежности в самом прямом смысле означает, быть или не быть данной системе. К ним можно отнести и различные информационные системы, включающие в свой состав большое число компьютеров, имеющих сетевую структуру, территориально распределенные информационные системы, информационные системы измерения параметров различных объектов, системы мониторинга и т.п.

Информационные системы могут иметь простую и сложную структуру. Их усложнение идет сегодня в различных направлениях. С одной стороны, в состав систем входит все большее число комплектующих элементов. С другой стороны, усложняется их структура, определяющая соединение отдельных элементов и их взаимодействие в процессе функционирования и поддержания работоспособности. При этом усложнение систем является прямым следствием постоянно возрастающей ответственности выполняемых ими функций, сложности и многообразия этих функций.

При прочих равных условиях система, состоящая из большого числа комплектующих элементов и имеющая более сложную структуру и сложный алгоритм функционирования, является менее надежной по сравнению с более простой системой. Все это требует разработки специальных методов обеспечения надежности таких систем, включая разработку математических методов расчета надежности и экспериментальной оценки.

Учебное пособие состоит из двух частей.

Первая часть представляет собой изложение традиционных основ расчета надежности систем.

Вторая часть посвящена логико-вероятностным методам исследования надежности и анализу надежности систем при нечетком оценивании надежности ее элементов.

Глава 1.

1.1. Основные понятия и определения

Прежде чем начать изложение теоретических основ надежности, введем основные термины и определения, принятые в современной инженерной практике.

Под надёжностью технической системы понимают свойство системы сохранять работоспособность в заданных условиях функционирования. Говоря о работоспособности, следует сразу же определить критерий отказа системы. Отказ - это событие, после возникновения которого система утрачивает способность выполнять заданное назначение. Эти два понятия в определенном смысле выражаются одно через другое: отказ - это потеря работоспособности. Однако для той или иной информационной системы конкретное определение отказа зависит от многих факторов: назначения системы, выполняемой задачи, требований к выполнению данной конкретной функции и др.

Надежность - это сложное свойство, включающее в свой состав несколько единичных свойств: безотказность, готовность, сохраняемость, ремонтопригодность, а также безопасность и живучесть.

Под безопасностью понимается способность системы функционировать, не переходя в опасное состояние. Для информационных систем это свойство не является существенным по сравнению, например, с системами атомной энергетики.

Под живучестью технической системы понимают ее способность противостоять внешним воздействиям как естественного характера не предусмотренных условиями нормальной эксплуатации, так и преднамеренным.

Отличительным признаком надежности как свойства технической системы является то, что она характеризуется вероятностными процессами, протекающими во времени.

При изучении теории надёжности широко используются такие понятия как система, объект, элемент. Элемент - это такой объект, отдельные части которого не представляют существенного интереса в пределах проводимого анализа. Под термином "система" будем понимать множество (совокупность) действующих объектов, взаимосвязанных между собой функционально и рассматриваемых как единое структурное целое. Понятия "элемент", «объект» и "система" достаточно относительны. Подразделение системы на элементы зависит от требуемой точности проводимого анализа, от уровня наших представлений о системе и т.п. Более того, объект, считавшийся системой в одном исследовании, может рассматриваться как элемент, если изучается система большего масштаба. Например, в информационной сетевой системе элементом может считаться компьютер, терминал, канал связи и др.. В тоже время, рассматривая функционирование компьютера, можно выделить процессор, входные и выходные устройства, различные интерфейсы и т.д.

В теории надежности весьма важную роль играет деление элементов и систем на восстанавливаемые и невосстанавливаемые. Содержательный смысл этих понятий очевиден.

Информационные системы бывают простыми и сложными.

Простыми системами будем считать такие, в которых чётко определён признак отказа, т.е. можно указать элемент, отказ которого приводит к отказу системы.

Основные признаки классификации отказов изделий приведены в таблице 1.

Таблица 1

Признак классификации	Вид отказа
Характер изменений параметра до момента отказа	внезапный постепенный (параметрический)

	перемежающийся (сбои)
Степень потери полезных свойств	полный частичный
Восстанавливаемость полезных свойств	необратимый обратимый
Связь с другими отказами	независимый зависимый
Наличие внешних признаков	явный неявный
Причина возникновения	конструктивный технологический эксплуатационный
Период появления	при работе $\begin{cases}\text{период приработки}\\ \text{нормальная эксплуатация}\\ \text{период старения}\end{cases}$ при хранении при испытаниях
Цена отказа	простой техники (ущерб от ремонта) невыполнение задачи (ущерб от этого) моральный ущерб

1.2. Основные показатели надёжности

Одной из основных характеристик надежности объекта является время безотказной работы или наработка до отказа. Обозначим эту случайную величину T. Будем считать, что в момент времени t=0 объект начинает работу, а в момент t=T происходит отказ. Отказ – это случайное событие во времени. Закон распределения случайной величины T характеризуется интегральной функцией распределения $F(t)=$ Вер ($T_k < t$), где T_k – случайный момент времени, когда произошёл отказ. Тогда, $Q(t)=F(t)$ - вероятность отказа на интервале [0, t].

Функция Q(t) есть вероятность отказа до момента t. Плотность распределения вероятности отказа

$$f(t)=\frac{dF}{dt}=F'(t) \qquad (1)$$

Безотказная работа - противоположное событие по отношению к событию отказа, поэтому вероятность безотказной работы в течении времени t:

$$P(t)=1-Q(t) \qquad (2)$$

Если F (t) – дифференцируемая функция (на практике это почти всегда выполняется), то дифференциальная плотность отказа:

$$f(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=-\frac{d\underline{P}(t)}{dt} \qquad (3)$$

Тогда вероятность отказа и вероятность безотказной работы объекта в течение времени t определяется через плотность вероятности отказа :

$$Q(t) = \int_0^t f(t)dt, \qquad (4)$$

$$P(t) = \int_t^\infty f(t)dt.$$

В расчетах чаще всего применяют такую характеристику надежности как интенсивность отказов λ(t). Интенсивность отказов можно рассматривать как относительную скорость уменьшения значений функции надежности с увеличением интервала (0, t).

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = -\frac{dP(t)/dt}{P(t)} \qquad (5)$$

Решение уравнения (5) при начальном условии p(0)=1 дает для функции надежности

формулу

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t)dt\right] \qquad (6)$$

При λ=const формула (6) существенно упрощается:

$$P(t)=\exp(-\lambda t). \qquad (7)$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ – это есть условная плотность вероятности отказов в предположении, что до момента t элемент функционировал безотказно. Таким образом, случайная величина имеет три характеристики - p(t), $f(t)$, $\lambda(t)$.

В качестве показателей надежности применяют также числовые характеристики случайной наработки до отказа. Их обычно легче определить по экспериментальным данным, чем зависимости p(t), λ(t), f(t). Наиболее часто используют среднюю наработку до отказа (математическое ожидание наработки до отказа или первый начальный момент).

$$m_t = M[T] = \int_0^\infty tf(t)dt = \int t\frac{dF(t)}{dt}dt = -\int_0^\infty t\frac{dp(t)}{dt}dt, \qquad (8)$$

где F(t) - функция распределения случайной величины T.

Интегрируя (8) по частям, получаем

$$m_t = \int_0^\infty p(t)dt \qquad (9)$$

Таким образом, средняя наработка до отказа численно равна площади под кривой p(t).

При λ=const имеем

$$m_t = \int_0^\infty \exp(-\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda} \qquad (10)$$

Второй центральный момент (среднее квадратичное отклонение)

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (t - a_1)^2 f(t) dt \qquad (11)$$

Очень часто этих двух моментов бывает достаточно для полной характеристики функций распределения наработки до отказа. Например, в практически часто встречающихся случаях, когда $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ (экспоненциальное распределение), p(t)=exp(-λt) и $m_t = \bar{\tau} = \dfrac{1}{\lambda}$ - несёт исчерпывающую информацию о надежности системы.

Наиболее часто встречающиеся распределения и их основные показатели представлены в таблице 2.

Таблица 2

N п/п	Тип распределения	Функция распределения отказов	Плотность распределения отказов	Интенсив-ность отказов	Параметры законов	
					мат.ожид.	дисперсия
1	2	3	4	5	6	7
1	Показательные (экспоненциальные) $0 < t < \infty$	$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$	λ	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
2	Рэлея $0 < t < \infty$	$F(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$	$f(t) = \dfrac{t}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$	$\lambda(t) = \dfrac{t}{a^2}$	$a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$	$\dfrac{a^2}{2}(4 - \pi)$
3	Равномерное $a<t<b$	$F(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$	$f(t) = \dfrac{1}{b-a}$	$\lambda(t) = \dfrac{1}{b-t}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
4	Вейбулла $0 < t < \infty$	$F(t) =$ $= 1 - e^{-(\frac{t}{c})^b}$	$f(t) =$ $= \dfrac{b}{c}(\dfrac{t}{c})^b e^{-(\frac{t}{c})^b}$	$\lambda(t) = \dfrac{b}{c}(\dfrac{t}{c})^{b-}$	$\dfrac{c}{b}\Gamma(\dfrac{1}{b})$	$c^2\{ \dfrac{2}{b}\Gamma(\dfrac{2}{b}) - \left[\dfrac{1}{b}\Gamma(\dfrac{1}{b})\right]^2 \}$

при $\left.\begin{aligned} b &= 1 \\ c &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\}$ - распределение Вейбулла превращается в показательное.

при $\left.\begin{aligned} b &= 2 \\ c &= \end{aligned}\right\}$ - распределение Рэлея

1.3. Методы повышения надежности

Эффективность информационной системы в значительной степени зависит от уровня ее надежности, в первую очередь от уровня ее безотказности. Опыт эксплуатации показывает, что уровень надежности систем не всегда отвечает современным требованиям, поэтому весьма актуальна проблема разработки методов, позволяющих обеспечить требуемые уровни характеристик надежности системы. Надежность системы можно повысить, используя различные методы. При этом каждый раз надо выбирать пригодный метод с учетом стоимости, весовых, габаритных и других характеристик системы.

Методы повышения надежности можно классифицировать по области их использования.

Методы

Конструктивные	Производственные	Эксплуатационные
- Создание надежных элементов; - Создание благоприятного режима работы; - Методы рационального проектирования систем; - Методы введения избыточности: Нагрузочная, Параметрическая, Функциональная, Резервирование структуры. - Методы, защищающие элементы от разрушающих факторов	- Совершенствование технологии; - Автоматизация производства; - Тренировка элементов и модулей системы.	- Методы предупреждения отказов, основанные на прогнозировании моментов их появления; - Методы предупреждения отказов, основанные на статистических данных о долговечности элементов; - Повышение квалификации обслуживающего персонала; - Научные методы эксплуатации.

1.4. Резервирование как способ повышения надежности

Повышение надежности системы путем резервирования является одним из эффективных способов повышения надежности, но всегда связано с увеличением ее габаритов, массы, стоимости.

Рассмотрим кратко классификацию методов резервирования (см. табл.3)

Таблица 3

Признак резервирования	Метод резервирования
По виду соединения основных и резервных элементов	Общее
	Раздельное
	Смешанное
	С изменяющейся структурой (динамическое)
По нагруженности резервных элементов	Нагруженное

до их включения	Недогруженное (облегченное)
	Ненагруженное
	С изменяющейся нагрузкой
По способу переключения основных и резервных элементов	С ручным переключением
	С полуавтоматическим переключением
	С автоматическим переключением
По наличию восстановления элементов	Без восстановления
	С восстановлением
По используемым параметрам системы	Информационное Структурное Функциональное Временное

Рассмотрим методы резервирования по нагруженности резервных элементов.

По нагруженности резервных элементов резервирование подразделяется на следующие виды:

1. Нагруженное резервирование - когда резервный элемент находится в том же режиме, что и основной элемент.
2. Недогруженное резервирование - когда резервный элемент находится в менее нагруженном режиме, чем основной элемент.
3. Ненагруженное резервирование - когда резервный элемент не несет нагрузок (выключен).
4. Резервирование с изменяющейся нагрузкой - когда резервный элемент в выбранные моменты времени может находиться в одном из заданных состояний (нагруженном, облегченном, ненагруженном).

1.5. Нагруженное резервирование

Пусть система состоит из n основных элементов и m резервных элементов. Плотность вероятности безотказной работы f(t). Условия работы элементов не зависимы, а автомат контроля и коммутации элементов (АКК) - абсолютно надежный.

$$p(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt; \qquad q(t) = \int_0^t f(t)dt \tag{12}$$

Для решения задачи используем метод гипотез [1]. Предположим, что все элементы исправны. Так как работа элементов не зависима, вероятность этой гипотезы:

$$P_0(t) = \prod_{i=1}^{n+m} P_i(t) \tag{13}$$

Пусть отказал один конкретный (s-й) элемент, тогда вероятность этой гипотезы:

$$P_s(t) = q_s(t)\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n+m} P_i(t) = \frac{q_s(t)}{1-q_s(t)} P_0(t) = \frac{q_s(t)}{p_s(t)} P_0(t) \tag{14}$$

Вероятность отказа любого одного из m + n элементов:

$$P_1(t) = \sum_{s=1}^{n+m} P_s(t) = \sum_{s=1}^{n+m} \frac{q_s(t)}{p_s(t)} P_0(t) \qquad (15)$$

Пусть отказали любые два элемента (сначала s-й, потом k-й). Тогда вероятность этой гипотезы:

$$P_2(t) = \sum_{s=1}^{n+m} \sum_{k=s+1}^{n+m} \frac{q_s(t) q_k(t)}{p_s(t) p_k(t)} P_0(t) \qquad (16)$$

Далее аналогично

$$P_m(t) = \sum_{s=1}^{n+m} \sum_{k=s+1}^{n+m} \cdots \sum_{l=k+1}^{n+m} \frac{q_s(t) q_k(t) \cdots q_l(t)}{p_s(t) p_k(t) \cdots p_l(t)} P_0(t) \qquad (17)$$

Все рассмотренные выше гипотезы благоприятствуют работоспособному состоянию системы. Поэтому вероятность безотказной работы системы равна сумме вероятностей этих гипотез.

$$P_{n,m}(t) = \sum_{k=0}^{n+m} P_k(t) = P_0(t)\left[1 + \sum_{s=1}^{n+m} \frac{q_s(t)}{p_s(t)} + \cdots\right] \text{ или} \qquad (18)$$

$$P_{n,m}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial^k}{k!\,\partial x^k} \prod_{l=1}^{n+m} \left[p_l(t) + q_l(t)\right] x = 0 \qquad (19)$$

Так как все элементы равнонадежны, то

$$P_{n,m}(t) = \sum_{k=0}^{m} C_{n+m}^{k} q^k(t) p^{n+m-k}(t)$$

Если закон распределения экспоненциальный, т.е. $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, то $p(t) = e^{-\lambda t}$, $q(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$. Тогда

$$P_{m,n}(t) = \sum_{k=0}^{m} C_{m+n}^{k} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^k e^{-(m+n-k)\lambda t} \qquad (20)$$

При n=1

$$P_{m,1}(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda o t}\right)^k, \text{ где } k=m+1/ \qquad (21)$$

Тогда $f_{общ}(t) = k\lambda_0 e^{-\lambda o t}\left(1 - e^{-\lambda o t}\right)^{k-1}$, (22)

$$\lambda_{общ}(t) = \frac{k\lambda_0 e^{-\lambda o t}\left(1 - e^{-\lambda o t}\right)^{k-1}}{1 - \left(1 - e^{-\lambda o t}\right)^k}, \qquad (23)$$

при $\lambda_0(t) << 1$ $\qquad \lambda_{общ}(t) \approx k\lambda_0{}^k t^{k-1}$

Таким образом у резервированной системы интенсивность отказа является функцией времени наработки, даже для экспоненциального закона распределения времени наработки для элементов.

При t=0, $\lambda_{общ}(t)$=0; при $t \to \infty$ $\lambda_{общ}(t) \to \lambda_0$

1.6. Ненагруженное резервирование

Здесь те же условия, что и в п. 5, но время безотказной работы элементов распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = \frac{1}{\bar{\tau}}$. Интенсивность отказов такой системы $\lambda_n = n\lambda$, так как резервированные элементы без отказов.

Необходимо найти плотность распределения суммы независимых случайных величин

$$t^*_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} T^*_i \tag{24}$$

Для этого воспользуемся характеристической функцией

$$\Phi_i(\eta) = \int_0^\infty f_i(T_i) e^{-\eta T_i} dT_i = \frac{\lambda n}{\eta + n\lambda}\text{, где } \eta = i\omega \tag{25}$$

Тогда

$$F_{m+1}(\eta) = \prod_{i=1}^{m+1} \Phi_i(\eta) = \frac{(\lambda n)^{m+1}}{(\eta + n\lambda)^{m+1}} \tag{26}$$

Плотность вероятности момента выхода из строя m + 1 элемента

$$\Sigma_{m+1}(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint F_{m+1}(\eta) e^{\lambda t} d\eta = n\lambda \frac{(n\lambda t)^m}{m!} e^{-n\lambda t} \tag{27}$$

Вероятность безотказной работы системы определится как

$$P_{m,n}(t) = \int_t^\infty \Sigma_{m+1}(t) dt = \sum_{k=0}^{m} \frac{(n\lambda t)^k}{k!} e^{-n\lambda t} \tag{28}$$

Если резервирования элементов нет, т.е. m =0, то

$$P_{0,n}(t) = e^{-n\lambda t} \tag{29}$$

1.7. Недогруженное резервирование

Система состоит из n основных элементов с интенсивностью отказов λ = a и m резервных элементов с λ = b. Условия работы элементов независимы. Автомат контроля и коммутации - абсолютно надежен. Система будет исправна, если число k отказов элементов $0 \le k(t) \le m$. Тогда $P_{m,n}(t) = \sum_{k=0}^{m} \psi_k(t)$ или $P_{m,n}(t) = 1 - \psi_{m+1}(t)$, (30)

так как при k = m + 1 будет отказ, а группа $0 \le k(t) \le m + 1$ - полная группа событий

Если в момент t система находится в состоянии k, то интенсивность ее отказов

$$a_k = \begin{cases} na + (m-k)b & \text{при } 0 \le k \le m \\ 0 & \text{при } k = m+1 \end{cases}$$

В момент времени t + Δ t система будет находиться в состоянии k с вероятностью

$$\psi_k(t + \Delta t) = \psi_k(t)(1 - a_k \Delta t) + \psi_{k-1}(t) a_{k-1} \Delta t \qquad (31)$$

- вероятность того, что система не уйдет из состояния k.

Устремив $\Delta t \to 0$ получим общее выражение для дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi_k(t)}{dt} = -a_k \psi_k(t) + a_{k-1} \psi_{k-1}(t) \qquad (32)$$

При k=0 $$\frac{d\psi_0(t)}{dt} = -(na + mb)\psi_0(t) \qquad (33)$$

k=1 $$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = -(na + (m-1)b)\psi_1(t) + (na + mb)\psi_0(t) \qquad (34)$$

k=m+1 $$\frac{d\psi_{m+1}(t)}{dt} = na\psi_m(t) \qquad (35)$$

Начальные условия

$$\psi_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0 \\ 0 & \text{при } 0 < k \le m+1 \end{cases} \qquad (36)$$

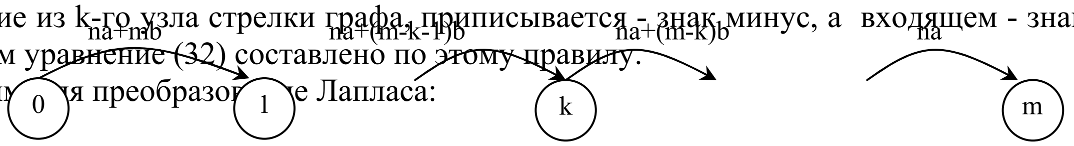
т. е. в начальный момент времени все элементы исправны.

Уравнение (32) - уравнение А.Н.Колмогорова для однородного марковского процесса (λ = const).

Уравнению (32) можно сопоставить граф переходов из одного состояния системы в другое

На основании анализа уравнений А.Н.Колмогорова, Б.В.Васильева [1] было сформулировано мнемоническое правило составления таких уравнений по заданному графу. В левой части каждого уравнения стоит производная по времени от вероятности нахождения системы в k-м состоянии в момент времени t. Число членов в правой части равно алгебраической сумме произведений интенсивностей переходов на соответствующие вероятности пребывания системы в тех узлах графа, откуда совершается непосредственный переход системы в другие (соседние) узлы. Причем, слагаемым, которым соответствуют выходящие из k-го узла стрелки графа, приписывается - знак минус, а входящем - знак плюс. Как видим уравнение (32) составлено по этому правилу.

Применяя преобразование Лапласа:



$$\Phi_k(\eta) = \int_0^\infty \psi_k(t) e^{-\eta t} dt \qquad (37)$$

систему дифференциальных уравнений сводим к алгебраической, решая которую получим

$$\Phi_{m+1}(\eta) = \frac{1}{\eta} \prod_{i=0}^{m} \frac{na + ib}{\eta + na + ib} \qquad (38)$$

Зная изображение $\psi_{m+1}(t)$ по Лапласу находим

$$\psi_{m+1}(t) = \frac{2}{2\pi j} \oint \Phi_{m+1}(\eta) e^{\eta t} d\eta \qquad (39)$$

Решая (39), получим

$$\psi_{m+1}(t) = 1 - e^{-nat} \sum_{k=0}^{m} A_k(m) e^{-kbt} , \qquad (40)$$

где $$A_k(m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0 \\ \dfrac{1}{b^m} \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} \dfrac{na + ib}{i - k} & \text{при } m \geq 1 \end{cases} \qquad (41)$$

Окончательно

$$P_{m,n}(t) = e^{-nat} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{-k} \frac{B_k(m)}{(m-k)!k!} e^{-kbt} , \qquad (42)$$

где $$B_k(m) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0 \\ \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} \left(i + n\dfrac{a}{b} \right) & \text{при } m \geq 1 \end{cases} \qquad (43)$$

Например, m=1, a/b=1

$B_0(1)=1+n$; $B_1(1)=n$

$$P_{1,n}(t) = e^{-n\lambda t} \left[\frac{1+n}{1 \cdot 1} - \frac{n}{1 \cdot 1} e^{-\lambda t} \right]; \qquad (44)$$

$$\left[1 + n\left(1 - e^{-\lambda t}\right)\right] = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} + 1 + n - ne^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} + (n+1)\left(1 - e^{-\lambda t}\right);$$

$$P_{1,n}(t) = e^{-(n+1)\lambda t} + (n+1)\left(1 - e^{-\lambda t}\right) e^{-n\lambda t} = \sum_{k=0}^{1} C_{n+1}^{k} q^k(t) p^{n+1-k}(t) \qquad (45)$$

$$q = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$p = e^{-\lambda t}$$

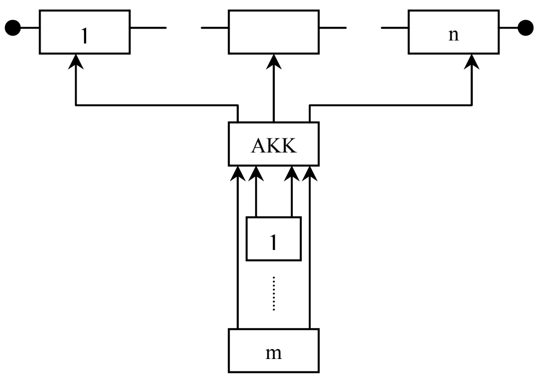
$$P_{n,m}(t) = e^{-nat} \prod_{i=0}^{m} \left(i + n\frac{a}{b} \right) \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{e^{-kbt}}{(m-k)!\,k!\left(k + n\frac{a}{b} \right)} =$$
$$= \prod \left(i + n\frac{a}{b} \right) \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{e^{-b(k+n)}}{(m-k)!\,k!\left(k + n\frac{a}{b} \right)} \qquad (46)$$

Из анализа выражения (46) следует, что распределение времени безотказной работы резервированной системы отлично от экспоненциального распределения, даже, если все ее элементы имеют такое распределение.

1.8. Надежность резервированной системы с автоматом контроля и коммутации

1. Влияние надежности АКК на работоспособность системы. Требования к надежности автомата.

До сих пор предполагали, что АКК абсолютно надежный.



Сделаем следующие допущения:

1) Обнаружение и замена отказавших элементов в системе происходит мгновенно.
2) Интенсивность отказов обозначим как а и в
3) $f_a(t)=\nu e^{-\nu t}$ $f_a(t) = \nu e^{-\nu t}$
4) Условия работы элементов независимы.
5) Отказ АКК не приводит к отказу системы до следующего отказа элемента.

Очевидно, что АКК может отказать до того как будет использован весь резерв, т.е. он тоже определяет надежность системы.

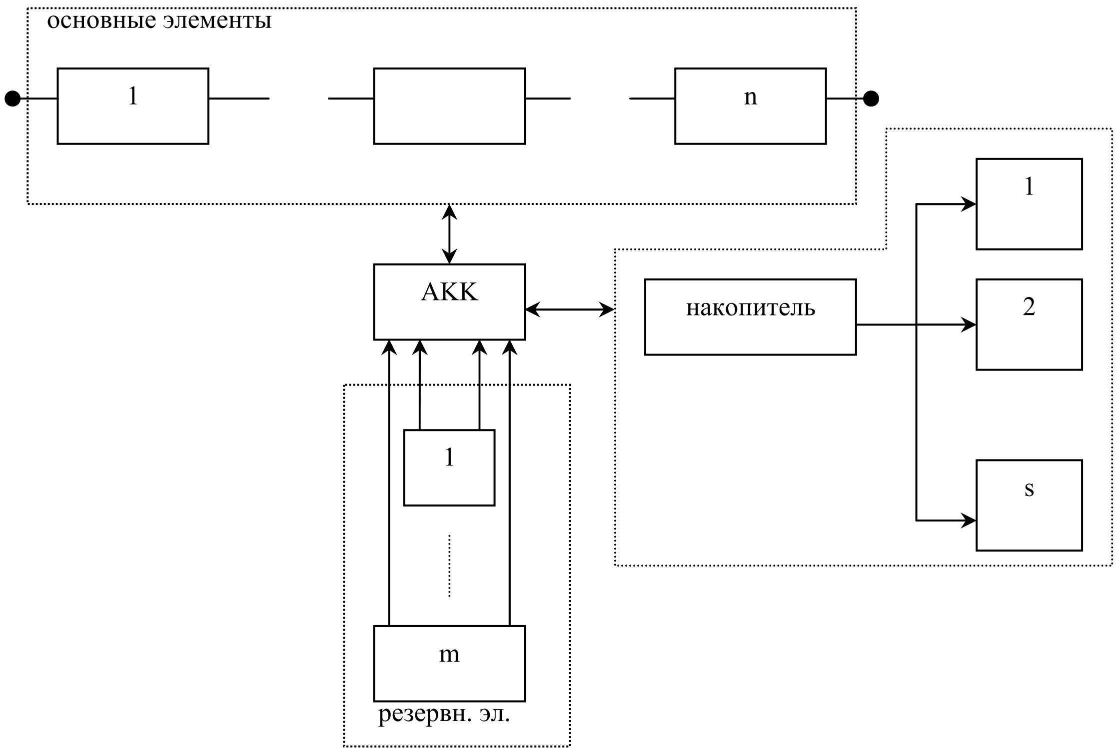
Можно показать, что

$$P_{m,n}(t) = \begin{cases} e^{-nat} \\ e^{-nat}\left[1 + \sum_{k=0}^{m} C_k'(t) \right] \end{cases} \qquad (47)$$

$$C_k'(t) = (-1)^k \frac{1 - e^{-(\nu + kb)t}}{(m-k)!\,(k-1)!\left(n\frac{a}{b} + k \right)\left(\frac{\nu}{b} + k \right)} \prod_{s=0}^{m} \left(s + n\frac{a}{b} \right) \qquad (48)$$

1.9. Резервирование с восстановлением

Резервирование с восстановлением дает существенный выигрыш в надежности системы. Пусть система состоит из n + m элементов и узла восстановления.



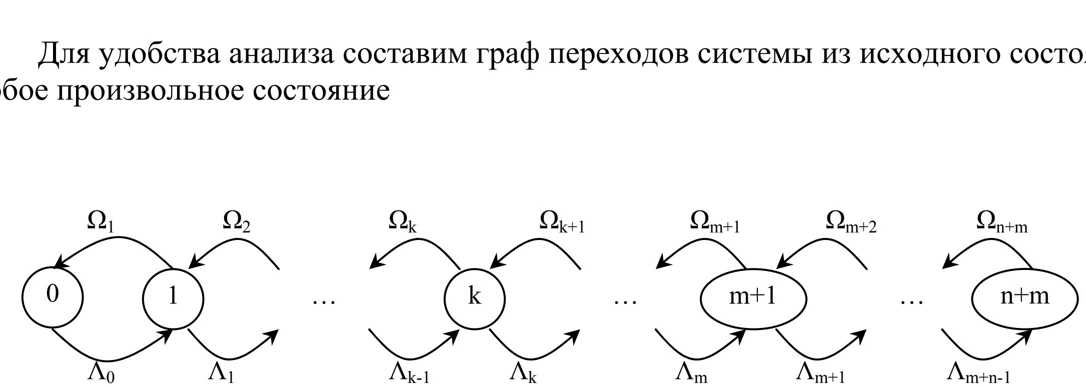
Предположения:

1. групповое резервирование с λ и λ_p ;
2. условия работы и восстановления всех элементов независимые;
3. АКК абсолютно надежен и работает мгновенно;
4. восстановление отказавшего элемента начинается немедленно, если есть свободная ячейка восстановления, в противном случае - в накопитель;
5. восстановление осуществляется с интенсивностью восстановления – μ;
6. освободившаяся ячейка восстановления немедленно приступает к восстановлению элементов в порядке выхода их из строя;

В каждом из n + m состояний системы может находиться с вероятностью $P_к(t)$, к = 0,1, n + m; причем

$$\sum_{k=0}^{n+m} P_k(t) = 1 \qquad (49)$$

Для удобства анализа составим граф переходов системы из исходного состояния (к = 0) в любое произвольное состояние



Из графа переходов следует, что в системе идут два процесса:

Первый процесс состоит в утрате работоспособности (отказе) элементов, т.е. существует интенсивность перехода Λ_k системы из состояния к в к + 1.

Второй процесс состоит в возобновлении работоспособности отказавших элементов, т.е.существует интенсивность перехода Ω_k системы из к состояния в к - 1.

$$\Lambda_k = \begin{cases} n\lambda + (m-k)\lambda_p & \text{при } 0 \le k \le m \\ (n+m-k)\lambda & \text{при } m < k < n+m \\ 0 & \text{при } k \ge m+n \end{cases} \tag{50}$$

$$\Omega_k = \begin{cases} k\mu & \text{при } 0 < k < s \\ s\mu & \text{при } s \le k \le n+m \\ 0 & \text{при } k > m+n \end{cases} \tag{51}$$

Для нахождения вероятностей состояний $p_к(t)$ системы необходимо составить систему дифференциальных уравнений. Для составления дифференциальных уравнений воспользуемся мнемоническим правилом.

В левой части уравнения находится производная от вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием. Если стрелка направлена из состояния системы, то соответствующий член уравнения имеет знак минус, а если в состояние, то знак плюс. Каждый член уравнения в правой части равен произведению интенсивности перехода, соответствующего данной стрелке графа, и вероятности того состояния, из которого выходит стрелка. Так, например,

$$\begin{aligned} \frac{dP_k(t)}{dt} &= -\Omega_k p_k(t) - \Lambda_k p_k(t) + \Lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \Omega_{k+1} p_{k+1}(t) = \\ &= -(\Lambda_k + \Omega_k) p_k(t) + \Lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \Omega_{k+1} p_{k+1}(t) \end{aligned} \tag{52}$$

Тогда

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(n\lambda + m\lambda_p) p_0(t) + \mu p_1(t) \tag{53}$$

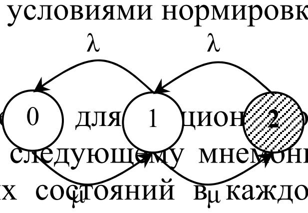
…

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = -(n\lambda + s\mu) p_m(t) + (n\lambda + \lambda_p) p_{m-1}(t) + s\mu p_{m+1}(t) \tag{54}$$

…

$$\frac{dP_{n+m}(t)}{dt} = s\mu p_{n+m}(t) + \lambda p_{n+m-1}(t) \tag{55}$$

Система уравнений дополняется начальными ($P_o(0) = 1$; $P_1(0) = \ldots;\ldots\ P_{m+n}\ (0)$) условиями и условиями нормировки $\sum_{j=0}^{n+m} P_j(t) = 1$.



Выражение для стационарной вероятности нахождения системы в j состояния можно написать по следующему мнемоническому правилу [1]. Нужно пройти кратчайшие пути из всех крайних состояний в каждое состояние системы и перемножить все интенсивности переходов, соответствующие проходимым стрелкам.

Вероятность нахождения в j-ом состоянии для графа без колец:

$$P_j = \Delta j / \sum_{i-0}^{k} \Delta i \quad , \qquad (56)$$

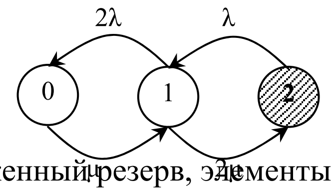
где Δj и Δi- произведения интенсивности переходов из всех крайних состояний соответственно в j-е и i- е состояние при движении по кратчайшему пути в направлении стрелок, к - число состояний системы.

Крайними считаются состояния, не имеющие выходящих стрелок при невосстанавливаемой системе и имеющие не более одной выходящей стрелки при восстанавливаемой системе.

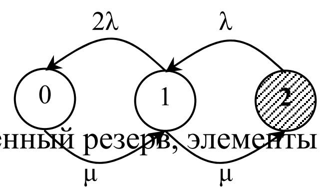
1.10. Некоторые результаты для дублирования системы

Варианты графов дублированной системы

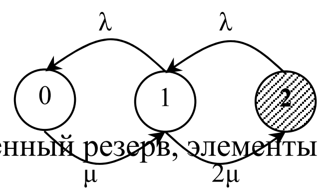
1. Нагруженный резерв, элементы могут восстанавливаться как по одному так и одновременно



2. Нагруженный резерв, элементы восстанавливаются по одному



3. Ненагруженный резерв, элементы восстанавливаются без ограничений



4. Ненагруженный резерв, элементы восстанавливаются по одному

Рассмотрим 4-й вариант

Ненагруженный резерв, элементы восстанавливаются по одному.
Вероятность безотказной работы для варианта 4 определяется при условии, что состояние (2) является поглощающим. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu) P_1(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) \end{cases} \qquad (57)$$

Начальные условия

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = 0 \qquad (58)$$

Нормирующее условие

$$\sum_{i=0}^{2} P_i(t) = 1 \qquad (59)$$

Для определения функции готовности

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu) P_1(t) + \mu P_2(t) \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \end{cases} \qquad (60)$$

Коэффициент готовности есть сумма стационарных вероятностей нахождения в 0 и 1 состоянии.

$$K_г = P_0 + P_1 = \frac{\Delta_0}{\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2} + \frac{\Delta_1}{\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2} \qquad (61)$$

$$\Delta_0 = \mu^2; \Delta_1 = \mu\lambda; \Delta_2 = \lambda^2$$

$$K_г = \frac{1 + \rho}{(1 + \rho)^2 - \rho} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (62)$$

Математическое ожидание времени безотказной работы в этом случае

$$\overline{T}_{\text{вос}} = \frac{\mu + 2\lambda}{\lambda^2} \qquad (63)$$

Сопоставляя этот случай с ненагруженным дублированием невосстанавливаемой системой при идеальном контроле:

$$\frac{\overline{T}_{\text{вос}}}{\overline{T}} = \left(\frac{\mu + 2\lambda}{\lambda^2}\right)\frac{\lambda}{2} = 1 + \frac{1}{2\rho} \qquad (64)$$

При ρ = 0,01 - 0,001 среднее время безотказной работы возрастает в 50 - 500 раз. Для резервированных восстанавливаемых систем аппаратура контроля существенно влияет на все количественные показатели надежности.

Если контролем охвачена не вся система, а лишь ее часть $\gamma = \lambda_2 / \lambda$, где λ_2 - интенсивность отказа неконтролируемой части, то при $\rho \ll 1$

$$\Delta K_{\text{г}} \approx \gamma\rho / (1 + 2\gamma) \qquad (65)$$

$$\overline{T} \approx \frac{1}{\gamma\lambda} \qquad (66)$$

Некоторые системы могут работать с допустимым перерывом после отказа. Тогда

$$K_{\text{г}} = 1 - \frac{\lambda e^{\mu\tau_{\text{доп}}}}{\lambda + \mu} \qquad (67)$$

$$\overline{T} \cong \frac{1}{\lambda} e^{\mu\tau_{\text{доп}}} \qquad (68)$$

1.11. Составлении графа состояний

Составление графа состояний является наиболее трудным этапом расчета надежности системы методом дифференциальных уравнений. Самые сложные графы состояний характерны для восстанавливаемых резервируемых систем. Чтобы для восстанавливаемой системы учесть все возможные состояния, целесообразно сначала построить граф состояний соответствующей невосстанавливаемой системы и за тем заполнять его обратными переходами.

Наибольшее влияние на структуру графа состояний оказывают условия восстановления отказавших элементов. Перед составлением графа состояний необходимо выяснить, при каких условиях начинается и заканчивается восстановление отказавших элементов, каков режим восстановления.

При наличии резерва восстановление отказавших элементов может начинаться и производиться при работоспособной системе. При этом, на графе состояний возможны обратные переходы как из работоспособных, так и из неработоспособных состояний системы.
Структура графа состояний во многом зависит от эксплуатационного обеспечения элементов системы. Очень часто при отказе системы работоспособные элементы выключаются. В этом случае на графе состояний нет переходов из одних неработоспособных состояний в другие.

Однако возможны системы, в которых каждый элемент функционирует не зависимо от других и имеет свое эксплуатационное обеспечение, при отказе системы работоспособные элементы в этом случае не отключаются и могут отказывать и восстанавливаться. На графе состояний системы в таких случаях имеют прямые и обратные переходы между неработающими состояниями.

Глава 2. Расчет показателей надежности информационных систем логико-вероятностными методами

2.1. Основы логико-вероятностных методов

Под логико-вероятностным методом будем понимать метод расчета надежности технических систем, при котором структура системы описывается методами математической логики, а количественная оценка ее надежности производится с помощью теории вероятностей.

Это определение включает в себя и многие другие аналогичные методы (например, вероятностную оценку дерева неисправностей, метод анализа дерева отказов и др.), в которых рассматривались только структурные простые системы [2]. Однако дальнейшее развитие логико-вероятностных методов (ЛВМ) в трудах в основном отечественных ученых [4] позволило решить ряд проблем, связанных как с аналитическими методами исследования надежности структурно-сложных систем, так и с автоматизированным логико-вероятностным моделированием ССС.

Оценивая роль ЛВМ, можно выделить три периода их развития:

1) период прямого замещения логических переменных вероятностями, а логических операций соответствующими арифметическими операциями, что возможно только для простых структур;
2) период разработки специализированных алгоритмов, позволяющих переходить от функций алгебры логики (ФАЛ) произвольного вида (с повторным составом аргументов и др.) к форме перехода к полному замещению (ФППЗ);
3) период автоматизированного логико-вероятностного моделирования структурнро-сложных систем большой размерности.

Одним из важных вопросов в изучении логико-вероятностных методов является знание алгебры логики.

Алгебра логики - это раздел математической логики, изучающей логические операции над высказываниями. Ее основоположником является Джордж Буль, впервые применивший алгебраические методы для решения традиционных логических задач.

Ниже в качестве справочного материала приводятся основные логические операции.

2.2. Основные логические операции

Конъюнкция. Конъюнкция двух высказываний A и B обозначается $A \wedge B$ (читается A и B). Иногда вместо знака логического умножения используется символ "•" или между перемножаемыми высказываниями знак вообще отсутствует

$$A \wedge B = A \bullet B = AB.$$

Значение истинности логического произведения $A \wedge B$ определяется в зависимости от значения истинности высказываний A и B следующими соотношениями:

$$0 \wedge 0=0;\ 0 \wedge 1=0\ 1 \wedge 0=0;\ 1 \wedge 1=1. \qquad (2.1)$$

Конъюнкция $A \wedge B$ двух высказываний представляет собой сложное высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны составляющие его высказывания A и B.

Дизъюнкция. Дизъюнкция двух высказываний A и B обозначается $A \vee B$ (читается A или B). В дальнейшем (с целью упрощения громоздких формул) будем обозначать дизъюнкцию в виде матрицы:

$$A \vee B = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}.$$

Значение истинности логического сложения $A \vee B$ определяется в зависимости от значений истинности высказываний A и B следующими соотношениями:

$$0 \vee 0=0;\ 0 \vee 1=1;\ 1 \vee 0=1;\ 1 \vee 1=1. \qquad (2.2)$$

Дизъюнкция двух высказываний A и B является сложным высказыванием, которое ложно тогда и только тогда, когда оба слагаемых A и B ложны.

Отрицание. Отрицание высказывания A обозначается $A^{/}$ (иногда $\overline{A}$) (читается: не A). Значение истинности высказывания A определяется следующими соотношениями:

$$1^{/}=0;\ 0^{/}=1.$$

Таким образом, отрицанием высказывания A является сложное высказывание $A^{/}$, которое ложно когда A истинно, и истинно, когда A ложно.

Приведенные основные логические операции не являются независимыми и могут выражаться друг через друга. Преобразование логических выражений выполняются по определенным правилам, которые мы сейчас и рассмотрим.

Правила для одной переменной.

1.$A \wedge 1=A$;2.$A \wedge 0=0$;3.$A \wedge A=A$;4.$A \wedge A^{/}=0$;5.$A \vee 1=1$;6.$A \vee 0=A$;7.$A \vee A=A$ 8.$A \vee A^{/}=1$
9.$A^{//=}A$ 10.$A^{///}=A^{/}$

(2.3)

Правила 1-10 доказываются простой подстановкой вместо A единицы и нуля. Как следствие из правил 3 и 7 имеем *закон тавтологии*:

$$\left.\begin{aligned} A \wedge A \wedge \ldots A = A; \\ A \vee A \vee \ldots A = A. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

В отличие от обычной алгебры в алгебре логики умножение переменной самой на себя или приведение подобных членов осуществляется согласно перечисленным тождествам без появления показателей степени или коэффициентов.

Правила для двух и трех переменных. Функции конъюнкции и дизъюнкции обладают свойствами, аналогичными свойствам операции умножения и сложения. Легко убедится в том, что для этих функций имеет место *сочетательный* (или *ассоциативный*) закон:

$$11. A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C; \quad 12. A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C, \qquad (2.5)$$

а также *переместительный* (или *коммутативный*) закон:

$$13. A \wedge B = B \wedge A; \quad 14. A \vee B = B \vee A. \qquad (2.6)$$

Правила 11-14 определяют конъюнкцию и дизъюнкции в отдельности.

В силу справедливости для логического умножения и логического сложения сочетательного и переместительного законов выражения, в которые входят конъюнкция и дизъюнкция, можно писать без скобок. При этом связь посредством знака "$\wedge$" считают более тесной, чем посредством знака "$\vee$". Тем самым в алгебре логики устанавливается правило записи выражений, аналогичное принятому в обычной алгебре (в процессе вычислений "старшие" действия выполняются раньше "младших"). Это позволяет вместо $(A\wedge B)\vee C$ писать просто $A\wedge B\vee C$.

Рассмотрим теперь правила, выражающие связь между операциями логического умножения и сложения, взятыми совместно. Для этих функций имеет место *распределительный* (или *дистрибутивный*) закон конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$15. \; A\wedge(B\vee C) = (A\wedge B)\vee(A\wedge C) \qquad (2.7)$$

и распределительный закон дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$16. \; A\vee(B\wedge C) = (A\vee B)\wedge(A\vee C), \qquad (2.8)$$

который в обычной алгебре не имеет места. Действительно,

$$a+bc \neq (a+b)(a+c).$$

Отметим, что все три названных закона обладают "симметрией" в том смысле, что из любого закона для дизъюнкции (конъюнкции) можно получить путем замены знаков дизъюнкции на знаки конъюнкции соответствующий закон для конъюнкции (дизъюнкции) и наоборот. Действительно, проведя замену знаков, например в выражении (2.7), получим:

$$A\vee(B\wedge C) = (A\vee B)\wedge(A\vee C).$$

Следующий закон, известный как *закон двойственности*, или *закон инверсий*, позволяет заменять отрицание конъюнкции дизъюнкцией отрицаний и отрицание дизъюнкции конъюнкцией отрицаний:

$$17. (A \wedge B)^{|} = A^{|} \vee B^{|}; \quad 18. (A \vee B)^{|} = A^{|} \wedge B^{|}. \qquad (2.9)$$

Если к выражениям (2.9) применить правило 9 (2.4), то получим:

$$19. A \wedge B = (A^{|} \vee B^{|})^{|}; \quad 20. A \vee B = (A^{|} \wedge B^{|})^{|}. \qquad (2.10)$$

Правила (2.10), названные в честь одного из основоположников математической логики *формулами де Моргана*, позволяют логическое умножение выразить через отрицание логической суммы из инверсных высказываний, а логическую сумму – через отрицание логического произведения из инверсных высказываний. Формулы (2.10) легко обобщаются на произвольное число логических переменных:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = (\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{|})^{|}; \qquad (2.11)$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i = (\bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{|})^{|}, \qquad (2.12)$$

где логические переменные обозначены буквой *x* с различными индексами $i=1,2,...,n$, а знаки конъюнкции и дизъюнкции аналогичны знакам произведения $\prod$ и суммы $\sum$ в обычной алгебре.

Используя перечисленные четыре основных закона, можно установить ряд других полезных соотношений, позволяющих существенно упростить сложные логические выражения.

Познакомимся прежде всего с операциями поглощения и склеивания.

Операция *поглощения* (absorption) определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &21. (A \wedge B) \vee A = A; \\ &22. A \wedge (B \vee A) = A. \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

Операция *склеивания* (merging) определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &23. (A \wedge B) \vee (A \wedge B^{|}) = AB \vee AB^{|} = A(B \vee B^{|}) = A \cdot 1 = A; \\ &24. (A \wedge B) \vee (A^{|} \wedge B) = AB \vee A^{|}B = B(A \vee A^{|}) = B \cdot 1 = B. \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

Упростим теперь выражение $A\wedge(A^{/}\vee B)$. На основании распределительного закона конъюнкции относительно дизъюнкции по правилу 15 имеем:

$$\mathbf{A\wedge(A^{/}\vee B)=(A\wedge A^{/})\vee(A\wedge B)}.$$

По правилу 4 $A\wedge A^{/}=0$, следовательно,

$$A\wedge(A^{/}\vee B)=0\vee(A\wedge B).$$

Используя правило 6, окончательно получаем:

$$25.\ A\wedge(A^{/}\vee B)=A\wedge B. \qquad (2.15)$$

На основании распределительного закона дизъюнкции относительно конъюнкции по правилу 16 имеем:

$$A\vee(A^{/}\wedge B)=(A\vee A^{/})\wedge(A\vee B).$$

По правилу 8 $A\vee A^{/}=1$, следовательно,

$$A\vee(A^{/}\wedge B)=1\wedge(A\vee B).$$

Используя правило 1, окончательно получаем:

$$26.\ A\vee(A^{/}\wedge B)=A\vee B. \qquad (2.16)$$

Операция *обобщенного склеивания* определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &27. AB \vee B^{|}C = AC \vee AB \vee B^{|}C; \\ &28. \begin{vmatrix} A & B^{|} \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A & B^{|} \\ C & B & C \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

Доказательство (2.17) проводится в первом выражении путем логического умножения первого слагаемого на $1\vee C$, а второго – на $1\vee A$ и последующего применения правил 15 и 23, во втором выражении - путем прибавления к первому сомножителю слагаемого $0\wedge A$, а ко второму - $0\wedge C$ и применения правил 16 и 24.

Проиллюстрируем это доказательство в матричной форме записи для правила 27:

$$\begin{vmatrix} AB \\ B^{|}C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB(1\vee C) \\ B^{|}C(1\vee A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB \\ ABC \\ B^{|}C \\ B^{|}CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB \\ B^{|}C \\ ABC \\ B^{|}CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB \\ B^{|}C \\ AC\begin{vmatrix} B \\ B^{|} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AB \\ B^{|}C \\ AC \end{vmatrix}$$

2.3. Основные определения и принятые обозначения

Введем в рассмотрение понятие *степень* аргумента x, которую будем обозначать $x_i^{a_i}$, где a_i- двоичная переменная величина. Положим, что

$$_i x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i, если\_a_i = 1 \\ x_i^{|}, если\_a_i = 0. \end{cases} \qquad (2.18)$$

Условимся переменные x_i и их отрицания $x_i^{|}$ ($i=1,2,...,n$) называть буквами, а i – номером или индексом переменной.

Определение 1. Выражение вида

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_r^{a_r} \qquad (2.19)$$

называется *элементарной конъюнкцией (К)* ранга r. В силу того, что $x_i x_i^{|} = 0$ и $x_i x_i ... x_i = x_i$ все буквы элементарной конъюнкции различны.

Определение 2. Выражение вида

$$K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_s, \qquad (2.20)$$

где K_i – элементарные конъюнкции различных рангов, называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Например, функция:

$$f(x_1,...,x_4) = x_1 x_2 \vee x_1 x_2 x_3^{|} \vee x_1^{|} x_3 x_4$$

записана в ДНФ, так как все три слагаемых являются элементарными конъюнкциями.

Определение 3. Если функция $f(x_1,...,x_n)$ записана в ДНФ, причем ранг каждой элементарной конъюнкции равен n, то такая ДНФ называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ), а конъюнкции членами СДНФ или *конституентами единицы.*

Определение 4. Выражение вида

$$x_1^{a_1} \vee x_2^{a_2} \vee ... \vee x_r^{a_r} \qquad (2.21)$$

называется *элементарной дизъюнкцией* (Д) ранга r.

Определение 5. Две элементарные конъюнкции называются *ортогональными*, если их произведение равно нулю. Например, произведение элементарных конъюнкций $x_1 x_2^{|}$ и $x_1 x_2 x_3 x_4$ равно нулю, так как одна из них содержит $x_2^{|}$, а другая x_2 и , следовательно, они ортогональны.

Определение 6. ДНФ называется *ортогональной дизъюнктивной нормальной формой* (ОДНФ), если все ее члены попарно ортогональны.

В соответствии с этим определением СДНФ является ОДНФ, так как все ее члены попарно ортогональны. Но СДНФ является самой неэкономной из всех ОДНФ, так как она содержит максимальное число букв.

Определение 7. *Бесповторной ДНФ* (БДНФ) называется такая ДНФ, в которой все буквы имеют разные номера. Буквы x_i и $x_i^{|}$ имеют один и тот же номер, поэтому они не могут одновременно входить в БДНФ.

Определение 8. *Бесповторной формой ФАЛ* называется такая форма, в которой все буквы имеют разные номера. Частным случаем бесповторной формы ФАЛ является БДНФ. Например, функция:

$$f(x_1,...,x_8) = x_1 \left| \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4^{|} \end{matrix} \right| \vee x_5 \left| \begin{matrix} x_6 \\ x_7 x_8^{|} \end{matrix} \right|$$

записана в бесповторной форме, так как все буквы имеют разные номера.

Определение 9. *Вероятностной функцией* (ВФ) будем называть вероятность истинности ФАЛ

$$P\{f(x_1,...,x_n)=1\}. \qquad (2.22)$$

Определение 10. Функции алгебры логики, допускающие непосредственный переход к ВФ заменой логических переменных вероятностными, а логических операций соответствующими арифметическими операциями, будем называть *формами перехода к замещению* (ФПЗ).

Определение 11. *Смешанной формой функции вероятностей* (СФФВ) будем называть форму функций, полученную в результате частичного замещения в ФАЛ логических переменных вероятностями и содержащую одновременно два типа переменных (логические переменные и вероятности) и две системы операций (логические и арифметические).

Особенность СФФВ состоит в том, что в ней все зависимости от аргументов определены в явной форме, через используемые элементарные операции (логические и арифметические). Она не может содержать операторов типа $P\{f=1\}$, если не известно явное выражение таких функций в виде ВФ и СФФВ. Смешанная форма имеет простой вероятностный смысл. Если в функции *f* после замещения некоторых логических переменных остались незамещенными переменные вектора *X*, то $P\{f=1\}=P(X)$. Это выражение имеет смысл *условной вероятности* того, что $f=1$, причем условия записаны с помощью незамещенных логических переменных. После задания значения вектора *X* вероятность *P(X)* превращается в условную вероятность, записанную в обычной для теории вероятностей форме.

Определение 12. Форма ФАЛ, допускающая переход от СФФВ путем замены части логических переменных соответствующими вероятностями и логических операций арифметическими и перевода незамещенных логических переменных в показатели степени вероятностей, называется *формой перехода к частичному замещению* (ФПЧЗ).

ФПЧЗ является частным случаем ФПЗ наряду с *формой перехода к полному замещению* (ФППЗ), в котором производится замещение одновременно всех логических переменных.

Определение 13. *Равнозначность*, или *эквивалентность*, высказываний *A* и *B* обозначается символом "~". Значение истинности эквивалентных высказываний *A* и *B* определяется в зависимости от значений истинности исходных высказываний по следующим соотношениям:

$$0\sim0=1;\ 0\sim1=0;\ 1\sim0=0;\ 1\sim1=1. \qquad (2.23)$$

Определение 14. *Разноименность, или отрицание равнозначности* (чаще эту операцию называют *логическим сложением по модулю 2*), высказываний *A* и *B* обозначается символом "$\dot{\vee}$" или "$\oplus$".

Значение истинности разноименных высказываний *A* и *B* определяется в зависимости от значений истинности исходных высказываний по следующим соотношениям:

$$0\oplus 0=0;\ 0\oplus 1=1;\ 1\oplus 0=1;\ 1\oplus 1=0. \qquad (2.24)$$

Иногда эту операцию называют еще *строгой дизъюнкцией* и обозначают "∨∨" (или $\dot{\vee}$). Связка, соединяющая высказывания *A* и *B*, в этом случае понимается не в смысле "или", а в смысле "либо-либо". Из соотношений (2.23) видно, что строго разделительное суждение $A\dot{\vee}B$ истинно лишь тогда, когда *A* ложно, *B* истинно и когда *A* истинно, *B* ложно.

Для логической операции сложения по модулю 2 имеют место переместительный и сочетательный законы, а также распределительный закон относительно операции конъюнкции:

$$29.\ A\oplus B = B\oplus A; \qquad (2.25)$$

$$30.\ A\oplus (B\oplus C) = (A\oplus B)\oplus C; \qquad (2.26)$$

$$31.\ A\wedge (B\oplus C) = (A\wedge B)\oplus (A\wedge C). \qquad (2.27)$$

Имеют место также очевидные соотношения

$$\left.\begin{aligned} &32. A\oplus 1 = A^{|};\\ &33. A\oplus 0 = A;\\ &34. A\oplus A = A;\\ &35. A\oplus A^{|} = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

Перечисленные логические операции связаны с операцией сложения по модулю 2 следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &36. A\vee B = A\oplus B\oplus AB;\\ &37. A\wedge B = A\oplus AB^{|};\\ &38. A\oplus B = AB^{|}\vee A^{|}B. \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

Определение 15. *Булевой разностью* (или *логической разностью*) функции $f(x_1,...,x_n)$ по аргументу x_i называется результат логического сложения по модулю 2 исходной функции и функции, полученной из исходной путем замены аргумента x_i на его отрицание

$$\Delta_{x_i} f(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_i,...,x_n)\oplus f(x_1,...,x_i^{|},..,x_n). \qquad (2.30)$$

Определение 16. Функцию

$$f_{x_i^{|}}(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_i^{|},..,x_n). \qquad (2.31)$$

будем называть *симметричной функцией по* x_i по отношению к исходной $f(x_1,..,x_n)$.

Определение 17. Функции, полученные заменой в исходной ФАЛ аргумента x_i на 1 и 0, будем называть *единичной* и *нулевой функцией* по аргументу x_i и обозначать соответственно:

$$f_1^{(i)}(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,1,..,x_n). \qquad (2.32)$$

$$f_0^{(i)}(x_1,...,x_n) = f(x_1,...,0,..,x_n). \qquad (2.33)$$

Определение 18. Функция $f(x_1,...,x_n)$ называется *монотонной*, если для любых наборов $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ и $(\beta_1,...,\beta_n)$, таких что $\alpha_i \le \beta_i$, имеет место соотношение:

$$f(\alpha_1,...,\alpha_n)\le f(\beta_1,...,\beta_n). \qquad (2.34)$$

Определение 19. Функцию, записанную в виде матрицы, в которой конъюнкции обозначаются расположением логических символов в строке, а дизъюнкцию – их расположением в столбце, будем называть *логической матрицей*.

К логическим матрицам применимы все известные преобразования алгебры логики. Так, переместительный закон конъюнкции допускает перестановку символов в строке, а переместительный закон дизъюнкции – перестановку строк логической матрицы.

Пусть ФАЛ имеет вид

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_8) = \{\{x_1 \wedge x_3 \wedge [x_5 \vee (x_4 \wedge x_6 \wedge x_8)]\}\vee \\ \vee \{x_2 \wedge x_4 \wedge [x_6 \vee (x_3 \wedge x_5 \wedge x_8)]\}\} \wedge x_7. \end{aligned} \qquad (2.35)$$

В матричной форме уравнение (2.35) можно представить в виде:

$$f(x_1,\dots,x_8) = \left| \begin{array}{l} x_1x_3\left| \begin{array}{l} x_5 \\ x_4x_6x_8 \end{array} \right. \\ x_2x_4\left| \begin{array}{l} x_6 \\ x_3x_5x_8 \end{array} \right| \end{array} \right| x_7 = \left| \begin{array}{l} x_1x_3x_5x_7 \\ x_1x_3x_4x_6x_8x_7 \\ x_2x_4x_6x_7 \\ x_2x_4x_3x_5x_8x_7 \end{array} \right| \qquad (2.36)$$

Вторая матрица уравнения (2.36) записана в ДНФ.

Закон инверсий (2.9) применительно к логическим матрицам осуществляется заменой конъюнктивных связей логических символов в строке на дизъюнктивные связи отрицаний этих символов, располагаемые в столбце, а дизъюнктивных связей между строками – на конъюнктивные связи между столбцами, образованными из этих строк.

Применяя закон инверсий к логической матрице (2.36), получим:

$$f(x_1,\dots,x_8)^{|} = \left| \begin{array}{l} x_1x_3x_5x_7 \\ x_1x_3x_4x_6x_8x_7 \\ x_2x_4x_6x_7 \\ x_2x_4x_3x_5x_8x_7 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_1^{|} \\ x_3^{|} \\ x_5^{|} \\ x_7^{|} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_1^{|} \\ x_3^{|} \\ x_4^{|} \\ x_6^{|} \\ x_8^{|} \\ x_7^{|} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_2^{|} \\ x_4^{|} \\ x_6^{|} \\ x_7^{|} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_2^{|} \\ x_4^{|} \\ x_3^{|} \\ x_5^{|} \\ x_8^{|} \\ x_7^{|} \end{array} \right| \qquad (2.37)$$

2.4. Некоторые теоремы алгебры логики

Тесная связь между теорией вероятностей событий и математической логикой замечена уже давно. В настоящее время математическая логика и теория вероятностей объединяются на основе *логико-вероятностного исчисления*.

Теория вероятностей количественно оценивает надежность или безопасность систем, структура которых описывается средствами математической логики.

Основной трудностью в практическом применении логико-вероятностных методов исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем является преобразование произвольных ФАЛ в формы перехода к полному замещению (ФППЗ). Чтобы сделать это преобразование направленным (стандартным) и математически строгим, необходимо было построить своеобразный "мостик" между алгеброй логики и теорией вероятностей. История становления ЛВМ и вклад отдельных ученых в их создание и развитие описаны в работе [119]. Опуская строгие доказательства специальных теорем, свойств и алгоритмов, которые составляют математическую основу ЛВМ, сформулируем здесь только их суть для последующего практического применения.

Теорема 1. Любую ФАЛ, зависящую от *n* аргументов (*n≥1*), можно представить в следующем виде:

$$f(x_1,...,x_n)=x_i f_1^{(i)}(x_1,...,x_n)\vee x_i^{|} f_0^{(i)}(x_1,...,x_n). \qquad (2.38)$$

Выражение (2.38) известное под названием *формулы разложения Шеннона*, которая оказывается справедливой и для алгебры по модулю 2. Применив правило 36 к правой части выражения(2.38), получим:

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_n) &= x_i f_1^{(i)}(x_1,...,x_n)\vee x_i^{|} f_0^{(i)}(x_1,...,x_n)= \\ &= x_i f_1^{(i)}(x_1,...,x_n)\oplus x_i^{|} f_0^{(i)}(x_1,...,x_n)\oplus \\ &\oplus x_i x_i^{|} f_1^{(i)}(x_1,...,x_n) f_0^{(i)}(x_1,...,x_n)= \\ &= x_i f_1^{(i)}(x_1,...,x_n)\oplus x_i^{|} f_0^{(i)}(x_1,...,x_n). \end{aligned} \qquad (2.39)$$

Свойство 1. Булеву разность любой ФАЛ по аргументу x_i можно представить в следующем виде:

$$\Delta_{x_i} f(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)\oplus f(x_1,...,x_n). \qquad (2.40)$$

Для доказательства эквивалентности выражений (2.30) и (2.40) используем формулу разложения (2.39) и правила 28-38. В соответствии с (2.30) и (2.31) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta x_i f(x_1,...,x_n) &= f(x_1,...,x_n)\oplus f_{x_i^{|}}(x_1,...,x_n)= \\ &= \left[x_i f_1^{(i)}(x_1,...,x_n)\oplus x_i^{|} f_0^{(i)}(x_1,...,x_n)\right]\oplus \\ &\oplus \left[x_i^{|} f_1^{(i)}(x_1,...,x_n)\oplus x_i f_0^{(i)}(x_1,...,x_n)\right]= \\ &= (x_i\oplus x_i^{|}) f_1^{(i)}(x_1,...,x_n)\oplus (x_i^{|}\oplus x_i) f_0^{(i)}(x_1,...,x_n)= \\ &= f_1^{(i)}(x_1,...,x_n)\oplus f_0^{(i)}(x_1,...,x_n)\ . \end{aligned}$$

Свойство 2. Булеву разность любой ФАЛ по аргументу x_i можно представить в базисе конъюнкция, дизъюнкция, отрицание в следующем виде:

$$\Delta_{x_i} f(x_1,...,x_n)=\begin{vmatrix} f_1^{(i)}(x_1,...,x_n) f_0^{|(i)}(x_1,...,x_n) \\ f_1^{|(i)}(x_1,...,x_n) f_0^{(i)}(x_1,...,x_n) \end{vmatrix}. \qquad (2.41)$$

Данное свойство следует из выражения (2.40) и правила 38.

Теорема 2. Любую ФАЛ, зависящую от *n* аргументов (*n≥1*), можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & f(x_1,x_2,...,x_i,x_{i+1},...,x_n)= \\ & =\vee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_{21}} ... x_i^{\alpha_i} f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_i,x_{i+1},...,x_n)\ . \end{aligned} \qquad (2.42)$$

Эта теорема называется *теоремой разложения* произвольной ФАЛ по любому числу аргументов $(x_1,x_2,...,x_i)$. Будет справедливо выражение (2.42) называть также *формулой разложения Д.А. Поспелова*, доказавшего теорему 2 в 1964г.[83].

При разложении ФАЛ по всем *n* аргументам получим СДНФ исходной функции, которую можно записать в виде:

$$f(x_1,...,x_n)=\underset{1}{\vee} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}\ , \qquad (2.43)$$

где символ $\underset{1}{\vee}$ означает, что дизъюнкция берется только по таким наборам $\langle \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \rangle$, на которых выполняется равенство

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1 \,. \qquad (2.44)$$

Теорема 3. Для всех монотонных ФАЛ множество наборов, на которых нулевая функция по аргументу x_i принимает значение, равное единице, есть подмножество наборов, на которых единичная функция по тому же аргументу x_i равна единице, т.е.

$$\{(x_1,...,x_n) : f_0^{(i)}(x_1,...,x_n) = 1\} \subset \{(x_1,...,x_n) : f_1^{(i)}(x_1,...,x_n) = 1\}. \qquad (2.45)$$

Доказательство этой теоремы приведено в работе [103].

Из теоремы 3 следует пять следствий, знание которых существенно облегчает логические преобразования для монотонных ФАЛ.

1) $\{(x_1,...,x_n) : f_0^{(i)}(x_1,...,x_n) = 1\} \subset \{(x_1,...,x_n) : f(x_1,...,x_n) = 1\} \subset$
$\subset \{(x_1,...,x_n) : f_1^{(i)}(x_1,...,x_n) = 1\};$ (2.46)

2) $f_1^{(i)}(x_1,...,x_n) \vee f_0^{(i)}(x_1,...,x_n) \equiv f_1^{(i)}(x_1,...,x_n)\,;$ (2.47)

3) $f_1^{(i)}(x_1,...,x_n) \wedge f_0^{(i)}(x_1,...,x_n) \equiv f_0^{(i)}(x_1,...,x_n)\,;$ (2.48)

4) $f_1^{(i)}(x_1,...,x_n) \wedge f_0^{\prime(i)}(x_1,...,x_n) \equiv \Delta_{x_i} f(x_1,...,x_n)\,;$ (2.49)

5) $f_1^{\prime(i)}(x_1,...,x_n) \wedge f_0^{(i)}(x_1,...,x_n) \equiv 0\,.$ (2.50)

Теорема 4. Частная производная от вероятности истинности монотонной ФАЛ $f(x_1,...,x_n)$ по вероятности истинности аргумента x_i численно равна вероятности истинности булевой разности этой функции по аргументу x_i:

$$\frac{\partial P\{f(x_1,...,x_n) = 1\}}{\partial P\{x_i = 1\}} = P\{\Delta_{x_i} f(x_1,...,x_n) = 1\}. \qquad (2.51)$$

Доказательство этой теоремы произведено в работе [103].

Теорема 5. Вероятность истинности произвольной ФАЛ, представленной в ОДНФ, равна сумме вероятностей истинности всех ортогональных членов этой ФАЛ:

$$P\left\{ f(x_1,...,x_n) = \mathop{\vee}_{i=1}^{S} \square_i = 1 \right\} = \sum_{i=1}^{S} P\{\square_i = 1\}, \qquad (2.52)$$

где $\square_i$ не только элементарные ортогональные конъюнкции ОДНФ, но и любые ФАЛ, попарно ортогональные.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [105].

Теорема 6. Дизъюнкция ортогональных бесповторных форм в базисе конъюнкция-отрицание является формой перехода к полному замещению (ФППЗ).

Справедливость этой теоремы следует из теоремы 5 и того, что каждое слагаемое в исходной дизъюнктивной форме является ФППЗ.

В настоящее время известно несколько форм перехода к полному замещению: СДНФ, ОДНФ, бесповторные ФАЛ в базисе конъюнкция-отрицание.

Если ФАЛ представлена в ФППЗ, то переход к вероятностной функции осуществляется по следующим правилам:

1) каждая буква в ФППЗ заменяется вероятностью ее равенства единице, причем (в надежности)
$$P\{x_i = 1\} = R_i, P\{x_i = 0\} = P\{x_i^{\prime} = 1\} = Q_i = 1 - R_i\,; \qquad (2.53)$$

2) отрицание функции заменятся разностью между единицей и вероятностью равенства этой функции единице, например:
$$P\left\{ f(x_1,...,x_7) = \left[(x_1 x_2)^{\prime} (x_3 x_4)^{\prime} (x_5 (x_6^{\prime} x_7^{\prime})^{\prime})^{\prime}\right] = 1 \right\} =$$

$$= 1 - (1 - R_1 R_2)(1 - R_3 R_4)\left[1 - R_5\left(1 - Q_6 Q_7\right)\right]; \qquad (2.54)$$

3) Операции логического умножения и сложения заменяются

Операциями арифметического умножения и сложения.

ВФ для ФАЛ, представленной в произвольной *бесповторной форме*, можно найти по ее выражению в базисе конъюнкция-отрицание, которое получается путем многократного применения правил де Моргана (2.10).

Пусть, например

$$f(x_1,..., x_8) = x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4^{|}) \vee x_5\left(x_6 \vee x_7 x_8^{|}\right),$$

и требуется найти $P\{(x_1,...,x_8) = 1\}$. Так как эта функция является бесповторной (хотя и не ДНФ)

$$f(x_1,...,x_8) = \left\{\left\{x_1\left[x_2^{|} x_3^{|} x_4\right]^{|}\right\}^{|}\left\{x_5\left[x_6^{|}(x_7 x_8^{|})^{|}\right]^{|}\right\}^{|}\right\}^{|}; \qquad (2.55)$$

$$P\{(x_1,...,x_8) = 1\} =$$

$$= 1 - \{1 - R_1\left[Q_2 Q_3 R_4\right]\}\{1 - R_5\left[1 - Q_6(1 - R_7 Q_8)\right]\}. \qquad (2.56)$$

В заключении, еще раз повторим, что здесь приведены именно основы логико-вероятностного исчисления, а конкретные логико-вероятностные методы будут изложены ниже.

2.5. Способы описания условий работоспособности системы

При использовании логико-вероятностного метода процесс анализа надежности информационной системы начинается с изучения ее состава, принципа работы, функциональных связей между элементами и особенностей эксплуатации. Все множество состояний системы можно разделить на два подмножества - работоспособных и неработоспособных состояний. Такое разделение производится в соответствии с выбранным (или заданным) критерием отказа системы.

Определени. Критерий отказа есть признак или совокупность признаков неработоспособного состояния системы, установленные в нормативно-технической и (или) конструкторской документации.

Признаками неработоспособного состояния могут являться нарушение способности системы выполнять свое назначение или несоответствие значений ее выходных параметров заданным требованиям, установленным в документации на систему.

Условия работоспособности формулируются для того, чтобы составить представление, при каких состояниях элементов, режимах их функционирования, условиях эксплуатации и т.д. информационная система будет находиться в работоспособном состоянии, а при каких - в неработоспособном. Условия работоспособности могут быть описаны словесно, графически или аналитически. Как правило, словесное описание предшествует построению графической логической модели, на базе которой осуществляется переход к аналитическому описанию. Этап графического описания имеет особое значение, т.к. является переходным этапом от неформального к формальному анализу, и от его качества зависит достоверность получаемых оценок показателей надежности системы. Этот переходный этап - самое ответственное звено в расчетах показателей надежности систем. Именно на этом этапе, как правило, принимаются все основные упрощающие окончательную модель допущения. Кроме того, могут возникнуть методические ошибки из-за замены функциональных связей между реальными элементами, логическими связями, учитывающими лишь некоторые возможные состояния системы. Ошибки, совершаемые на данном этапе, при дальнейших расчетах практически не обнаруживаются.

При графическом представлении условий работоспособности систем чаще всего применяют модели в виде структурной схемы надежности (ССН).

По ССН определяют структурную функцию - ФАЛ работоспособности, либо дерево отказов, по которым определяют количественные показатели надежности - функцию надежности системы h(r). Обобщенный алгоритм преобразования изображен на рис. 2.1

СИСТЕМА **ССН** **ФАЛ** **h(r)**

$$\left\{\begin{matrix}\text{Функциональная}\\ \text{и}\\ \text{струтурная}\\ \text{схемы}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Структурная}\\ \text{схема}\\ \text{наденжности}\\ \text{системы}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Структурная}\\ \text{функция}\\ \text{или}\\ \text{деревоотказов}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Функция}\\ \text{надежности}\\ \text{системы}\end{matrix}\right\}$$

Рис. 2.1 Обобщенный алгоритм расчета показателей надежности информационной системы логико-вероятностным методом

2.6. Структурные схемы надежности

Под структурной схемой надежности (ССН) понимают некоторую условную схему, учитывающую влияние элементов и особенно связей между ними на работоспособность системы в целом. ССН основана на анализе последствий отказов элементов. В ходе ее составления анализируются возможные виды отказов элементов и влияние отказов элементов и их различных комбинаций на работоспособность системы. При этом функциональные элементы системы заменяются логическими элементами, принимающими значение либо 1, либо - 0, где 1 - соответствует работоспособному состоянию элемента, а 0 - неработоспособному, а функциональные связи заменяются логическими.

Важно, что разбивка системы на элементы должна учитывать удобства дальнейшего анализа как надежности элементов, так и надежности системы в целом. Из сказанного следует, что ССН может существенно отличаться от функциональной схемы этой же системы, учитывающей прохождение сигналов.

Пример 1. Чтобы проиллюстрировать ССН, рассмотрим небольшой фрагмент информационной сети, состоящий из трех линий связи (в общем случае разнотипных), соединяющих два абонента (рис.2.2). В зависимости от требований, предъявляемых к данной сети, можно построить различные ССН, в которых каждая линия представлена в виде элемента. Так, если необходима работа непременно всех трех линий, то ССН сети будет вид такой, как на рис 2.2а. В этом случае структура ССН последовательная. Если для успешной работы сети достаточно одной линии (неважно какой), то ССН будет такой, как на рис. 2.2б. В этом случае ССН параллельная. Если же для работы необходимо иметь минимум две из трех линий, то ССН будет иметь вид, изображенный на рис.2.2в. В этом случае говорят, что ССН имеет конфигурацию "2 из 3". Возможны и другие случаи, например, система считается работоспособной, если работоспособны непременно первая линия и любая из двух остальных. ССН такой информационной системы приведена на рис.2.2г и имеет последовательно-параллельную структуру. На рис. 2.2д приведена параллельная ССН, одна из ветвей которой представляет собой параллельное соединение элементов.

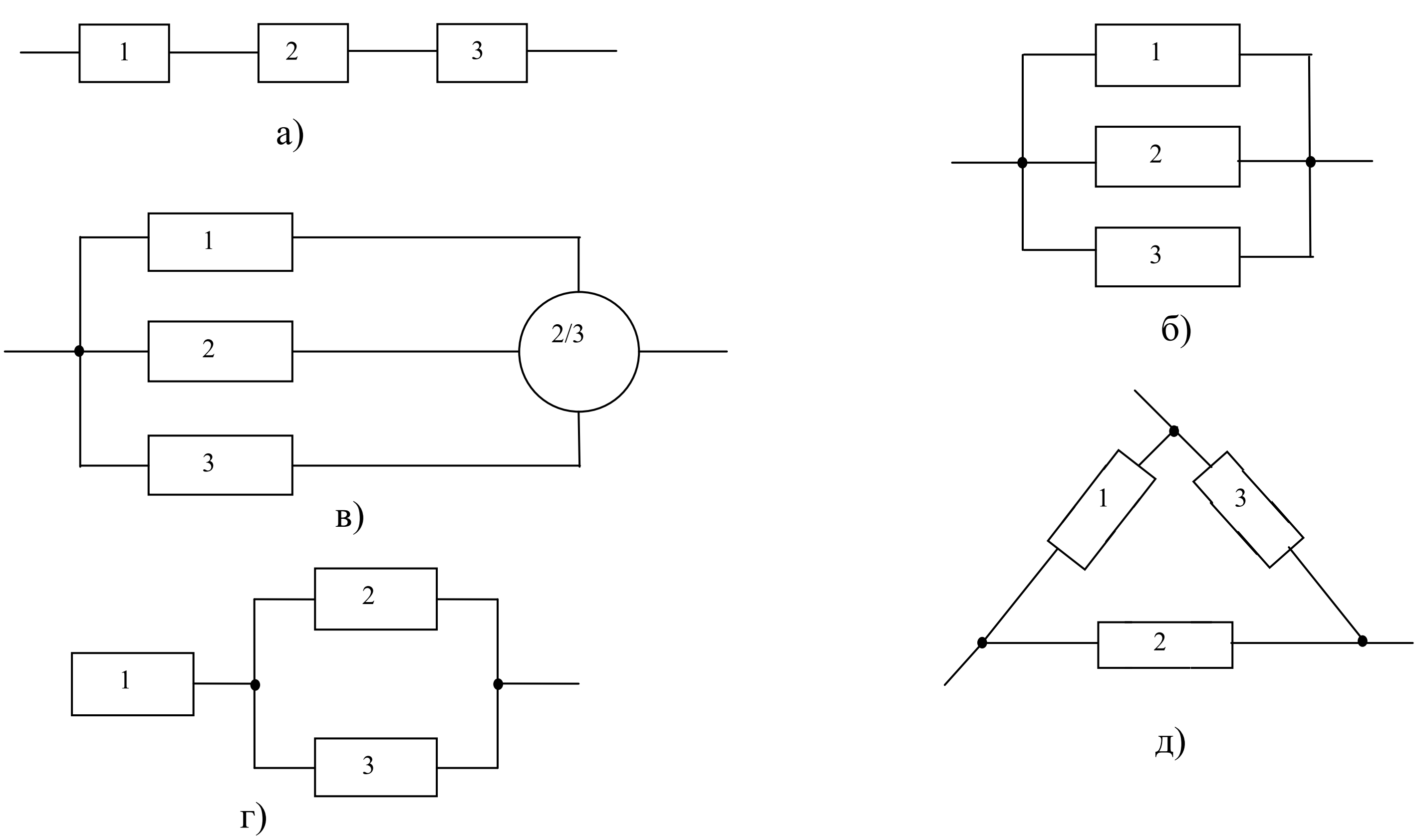


Рис. 2.2 Примеры ССН информационной сети

Таким образом, можно графически представить условия работоспособности различных вариантов систем через их структурные схемы надежности. На такой схеме все элементы системы в каком-то смысле равноценны, и это подчеркивается их одинаковым обозначением (одной и той же буквой X_i с различными номерами, произвольно присвоенными этим элементам) и одинаковым графическим изображением (в виде прямоугольника или кружка). Способ соединения элементов (не в электрическом, а в функциональном смысле) и раскрывает условия работоспособности.

Будем определять состояние i-го элемента системы булевой переменной x_i такой, что

$$x_i = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad i-\textit{й} \quad \textit{элемент} \quad \textit{работоспособен}, \\ 0, & \textit{если} \quad i-\textit{й} \quad \textit{элемент} \quad \textit{отказал}. \end{cases}$$

для $t = \overline{1,N}$, *где* $N -$ *число элементов в системе*. *Вектор* $X_{<N>} =< x_1, x_2, ...x_N >$, *будем называть вектором состояния системы*, *а число* $N -$ *порядком системы*.

Аналогичным образом бинарная переменная *y* обозначает состояние системы:

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ если система работоспособна} \\ 0, \text{ если система отказала.} \end{cases} \qquad (2.57)$$

Предположим, что состояние системы определено полностью состоянием ее элементов, и будем далее записывать:

$$y(x_1, x_2, \ldots x_n) = y(X) \qquad (2.58)$$

Функция *y*(X) принимает значение либо 1, либо 0 и связывает условия работоспособности элементов ССН. Тем самым мы предполагаем, что состояние системы в смысле работоспособности детерминировано зависит от состояния ее элементов. Т.е. y(X) является функцией $x_1, x_2, \ldots x_n$, которые, в свою очередь, могут находиться только в двух несовместных состояниях: либо 1 (работоспособное состояние), либо 0 (состояние полного отказа) В целом это предположение является до некоторой степени условным и ограничительным, так как оно исключает (хотя и не полностью) возможность частичного функционирования системы. Однако оно обладает тем достоинством, что приводит к модели, которая имеет строгое аналитическое решение и является достаточно реальной.

Каждой ССН можно сопоставить функцию алгебры логики, заменив связи между элементами $x_1, x_2, \ldots x_n$ конъюнкциями и дизъюнкциями. Такую функцию будем называть функцией алгебры логики (ФАЛ). Т.е. каждой системе через ССН однозначно сопоставляется ФАЛ $y(x_1, x_2, \ldots x_n) = y(X)$, которую будем называть функцией работоспособности системы или структурной функцией системы.

Пример 2. Рассмотрим ССН, изображенные на рис. 2.2.

Для первой ССН (рис 2.2а) элементы соединены последовательно. Следовательно отказ системы будет тогда, когда откажет или 1-ый, или 2-ой или 3-ий элемент, т. е.

$$\bar{y}(x) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$$

Применяя правило де Моргана получим

$$y(x) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

Это означает, что система работоспособна, когда работоспособны и 1-й, и 2-й, и 3-й элемент.

Рассмотрим параллельное соединение (рис. 2.2б). Отказ системы будет тогда, когда откажут и 1-ый и 2-ой и 3-ий элемент, т.е.

$$\bar{y}(x) = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$$

Тогда, применяя правило де Моргана, получим

$$y(X) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$$

Т.е. система работоспособна, когда работоспособен либо 1-й, либо 2-й, либо 3-й элемент.

Аналогично получаем :

для ССН (рис. 2.2 в) - $y(X) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$. Т. е. система работоспособна, когда работоспособны либо 1-й и 2-й, либо 2-й и 3-й, либо 1-й и 3-й элементы;

для ССН (рис.2.2 г) - $y(X) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$. Т. е. система работоспособна, когда работоспособны 1-й и либо 2-й, либо 3-й элемент;

для ССН (рис. 2.2 д) - $y(X) = x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$ - система работоспособна, когда работоспособен 1-й элемент, либо 2-й и 3-й.

В общем случае структурная функция имеет вид:

Для последовательных структур $- \quad y(X) = \overset{N}{\underset{i=1}{\wedge}} x_i;$

Для параллельных структур $- \quad y(X) = \overset{N}{\underset{i=1}{\vee}} x_i;$

Для структуры "k *из* N"$- \quad y(X) = (x_1 ......x_k) \vee (x_1 ....x_{k-1} x_{k+1}) \vee (x_{N-k+1} ....x_n)$

(*здесь и далее знак коньюнкции опущен для сокращения записи*);

Для последовательно – параллельных структур $- \quad y(X) = \overset{K}{\underset{j=1}{\wedge}} (\underset{i=P_j}{\vee} x_1),$

где K - число звеньев ССН, содержащих только параллельные соединения элементов, P_j - множество элементов в j -ом звене ССН. Однако формула (1.12) справедлива лишь для такой последовательно - параллельной ССН, которая показана на рис.2.2. Для общего случая такую формулу записать нельзя, ибо последовательно - параллельные структуры могут иметь довольно сложную конфигурацию.

Помимо схем изображенных на рис. 2. 2, ССН могут иметь и так называемую мостиковую структуру.

Информационная система связи, имеющая мостиковую структуру приведена на рнс.2.3 Система считается работоспособной, если на выходе есть полезный сигнал.

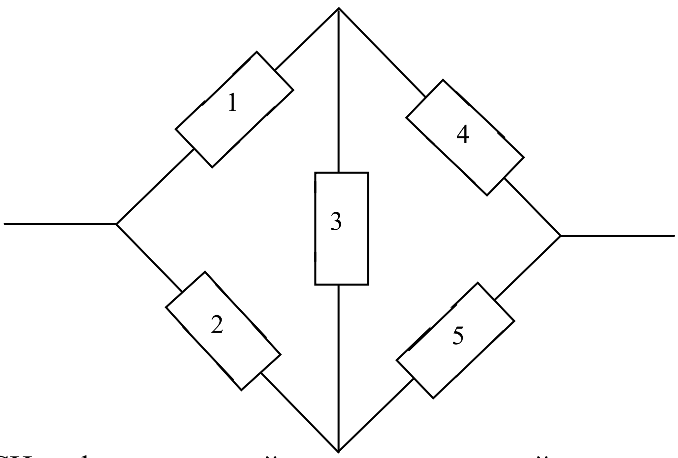


Рис. 2.3 ССН информационной системы, имеющей мостиковую структуру

2.7. Монотонные структуры

Рассмотрим систему со следующими свойствами:

1) каждый элемент системы может находиться только в одном из двух состояний - работоспособном или неработоспособном;
2) сама система, в свою очередь, также может находиться только в одном из двух возможных указанных выше состояний;
3) если все элементы работоспособны, то система тоже работоспособна;

4) если все элементы отказали, то система тоже отказала;
5) отказ элемента в отказавшей системе не может восстановить ее работоспособность, и замена отказавшего элемента в работоспособной системе на исправный не может привести к отказу системы.

Для систем, удовлетворяющим условиям 3, 4 и 5 функция работоспособности системы является монотонной, а сами системы называются системами с монотонной структурой. Заметим, что любая ФАЛ, записанная через конъюнкцию и дизъюнкцию (без отрицания) задает некоторую монотонную функцию [4].

Свойство монотонных булевых структурных функций означает следующее. Если система работоспособна при отказе подмножества M_1 своих элементов, то она работоспособна также, если отказало подмножество M_2 элементов. Причем $M_2 \subset M_1$. При работоспособности всех элементов система работоспособна, а при отказе всех элементов система всегда отказывает.

Свойство монотонности математически можно записать [3]:

1) $y(x^1) \geq y(x^{11})$ если $x^1 \geq x^{11}$
2) $y(1) = 1$
3) $y(0) = 0$

В заключение сформулируем ряд определений.

Последовательные и параллельные ССН являются частным случаем последовательно-параллельных схем. Последние подразделяются на простые и сложные.

Определение. Простой структурной схемой надежности называется схема, в которой все логические элементы используются не более одного раза**.**

Все последовательные и все параллельные ССН являются простыми.

Определение. Сложной структурной схемой надежности называется схема, в которой хотя бы один логический элемент используется более одного раза и никакими упрощающими приемами ее нельзя свести к простой.

Структура *"k* из *N"* и мостиковая сводятся к эквивалентным сложным последовательно-параллельным ССН. Метод преобразования к эквивалентным схемам изложен в следующем подразделе.

2.8. Представление монотонных структур в терминах путей и сечений

Методика использования путей и сечений - мощный инструмент для анализа сложных структур.

Введем несколько определений.

Определение. Путем *V* называют множество элементов, работоспособное состояние которых обеспечивает работоспособное состояние системы.

Применительно к ССН путь - это набор элементов, обеспечивающих связь между входом и выходом схемы. В мостиковой структуре на рис. 3 можно найти следующие пути: {1,4}, {2,5}, {1,3,5}, {2,3,4}, {1,2,4), {1,3,4}, {1,5,4}, {1,2,5}, {2,3,5}, {2,4,5}, {1,2,3,5}, {1,2,4,5}, {1.2,3,4}, {1,3,4,5}, {2,3,4,5}, {1,2,3,4,5}.

Определение. Минимальным путем *T* называют путь, удаление из которого хотя бы одного элемента приводит к тому, что оставшееся множество элементов уже не будет более путем.

Среди множества путей мостиковой структуры минимальными являются: {1,4}, {2,5}, {1,3,5}, {2,3,4}.

Определение . Сечением K называют множество элементов, отказ которых приводит к отказу системы. Удаление соответствующего множества блоков из ССН приводит к нарушению связи между входом и выходом схемы.

Сечения мостиковой структуры: {1,2,}, {4,5}, {1,3,5}, {2,3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,4,5}, {2,4,5}, {3,4,5}, {1,2,3,5}, {1,2,4,5}, {1,2,3,4}, {1,3,4,5}, {2,3,4,5}, {1,2,3,4,5}.

Определение. Минимальным сечением C называют сечение, удаление из которого хотя бы одного элемента приводит к тому, что оставшееся множество элементов уже не будет более сечением.

Минимальными сечениями мостиковой структуры будут: {1,2}, {4,5}, {1,3,5}, {2,3,4}.

Разница между минимальными и не минимальными сечениями очевидна; например, множество {1,3,4,5} - сечение, но не минимальное, потому что множество, остающееся после удаления элемента 4 ({1,3,5}), по-прежнему является сечением. Множество {1,3,5} напротив, уже минимальное сечение, так как дальнейшие попытки его сокращения приводят к множествам {1,3}, {1,5}, {3,5} , которые более не являются сечениями.

В терминах булевой алгебры определения минимальных путей и сечений можно сформулировать следующим образом:

Определение. Минимальный путь (МП) структуры представляет собой такую конъюнкцию ее элементов, ни один из компонентов которой нельзя изъять, не нарушив условие работоспособности системы. Такую конъюнкцию можно записать в виде следующей функции алгебры логики (ФАЛ):

$$T_l = \underset{i \in k_{Tl}}{\wedge} x_i,$$

где K_{Tl} – *множество номеров элементов содержащихся в* l–*ом пути.*

Определение. Минимальное сечение (МС) структуры представляет собой такую конъюнкцию из отрицаний ее элементов, ни один из компонентов которой нельзя изъять, не нарушив условия неработоспособности системы.

Такую конъюнкцию можно записать в виде следующей ФАЛ:

$$C_j = \underset{i \in k_{cj}}{\wedge} \overline{x_i},$$

где K_{cj} обозначает множество номеров элементов, содержащихся в j-ом сечении.

Каждая структура имеет конечное число минимальных путей и минимальных сечений. Используя эти понятия, можно записать структурную функцию системы:

$$y(X) = \overset{k_t}{\underset{l=1}{\vee}} T_l = \overset{k_t}{\underset{l=1}{\vee}} [\underset{i \in k_{Tl}}{\wedge} x_i], \tag{2.59}$$

где $K_{\text{т}}$ - число минимальных путей в системе.

Если обозначить через K_{C} число МС в структуре, то аналогичным образом можно записать структурную функцию через МС:

$$y(X) = \overset{k_c}{\underset{j=1}{\wedge}} \overline{C}_j = \overset{k_c}{\underset{j=1}{\wedge}} [\underset{i \in k_{cj}}{\vee} x_i], \tag{2.60}$$

ибо система в целом отказывает тогда и только тогда, когда хотя бы одно минимальное сечение отказало.

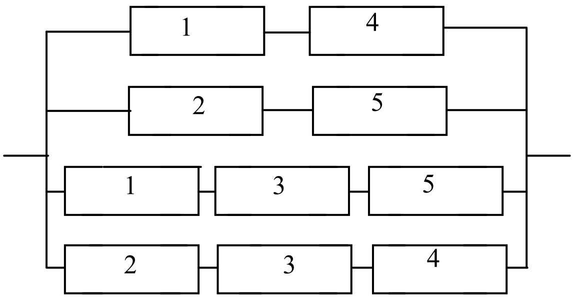
Знак дизъюнкции соответствует параллельному соединению, а знак конъюнкции - последовательному. Таким образом, произвольная структура может быть представлена как параллельное соединение минимальных путей, которые, в свою очередь, представляют собой последовательное соединение элементов, или как последовательное соединение минимальных сечений, которые, в свою очередь, представляют собой параллельное соединение элементов.

Пример 3. Мостиковая ССН, изображенная на рис. 2.3., может быть преобразована в две эквивалентные (в смысле надежности) ССН: с помощью минимальных путей (рис. 2. 4 а) и с помощью минимальных сечений (рис. 2.4б).

Структурная функция будет иметь вид:

а) по минимальным путям, согласно формуле (2.59).

$$y(X) = x_1x_4 \vee x_2x_5 \vee x_1x_3x_5 \vee x_2x_3x_4; \qquad (2.61)$$



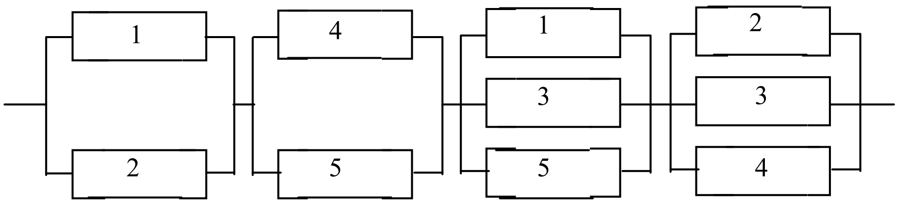


Рис. 2.4. Схемы, эквивалентные схеме на рис.2. 3

а) - схема с минимальными путями;

б) - схема с минимальными сечениями.

б) по минимальным сечениям, согласно формуле (2.60)

$$y(X) = (x_1 \vee x_2)(x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_3 \vee x_5)(x_2 \vee x_3 \vee x_4). \qquad (2.62)$$

Отметим, что выражения (2.61) и (2.62) тождественны, и одно может быть получено из другого по правилам алгебры логики.

В качестве упражнения предлагается преобразовать с помощью метода минимальных путей и сечений структуру "2 из 3", изображенную на рис.2.2в, в эквивалентные ССН и записать ее структурную функцию.

2.9. Показатели надежности структурно-сложных систем

В предыдущем разделе рассматривались детерминированные аспекты монотонных структур. В данном подразделе будет введено понятие меры надежности и установлена зависимость надежности системы от надежности элементов, причем будем предполагать, что все элементы системы статистически независимы. Читателям, интересующимся более подробно данными вопросами, в том числе и анализом надежности при зависимых элементах, рекомендуем обратиться к работе [4].

Как было отмечено в главе 1, надежность является сложным свойством, которое в зависимости от назначения системы и условий ее эксплуатации состоит из сочетания свойств безотказности, долговечности, ремонтопригодности и сохраняемости. Количественно надежность оценивают соответствующими показателями. Для восстанавливаемой системы обобщенной мерой надежности является вероятность того, что система не откажет в течение заданного интервала времени. Этот показатель называют вероятностью безотказной работы (ВБР). Для восстанавливаемых систем показателем, наиболее полно характеризующим надежность, является коэффициент готовности (КГ). Кроме вероятностных показателей, при анализе надежности восстанавливаемых систем широко применяются временные показатели - средняя наработка системы на отказ и среднее время восстановления работоспособного состояния системы.

Остановимся вначале на вероятностных показателях надежности (ВБР и КГ) и введем следующие обозначения: R_c - показатель надежности системы, r_i - показатель надежности элемента. $P(t_з)$ и $p(t_з)$ - вероятность безотказной работы (ВБР) системы и i -го элемента. $K_Г$ и $k_{Гi}$ - коэффициент готовности (КГ) системы и i - го элемента. С учетом данных обозначений можно записать:

– для невосстанавливаемых систем

$$R_c = P(t_з), \qquad r_1 = p(t_з);$$

– для восстанавливаемых систем

$$R_c = K_Г, \qquad r_1 = k_{Г1}.$$

Пусть, как и выше, i-и элемент характеризуется случайным состоянием x_i , а система имеет структурную функцию $y(x)$. Тогда

$$r_1 = [P\,[x_1 = 1],$$
$$R_c = [P\,[y(X) = 1].$$

В предположении независимости элементов можно представить показатель надежности системы как функцию от показателей надежности элементов

$$R_c = h(r),$$

где **r** =< r1, r2, rN >, N – порядок системы.

Назовем $h(\mathbf{r})$ функцией надежности системы. Это есть вероятностная функция, которая получается из ФПЗ путем замещения элементов их вероятностями, а логических операций - арифметическими.

Заметим, что если элементы системы зависимы, показатель надежности системы может быть функцией не только **r** .

Для простых систем, в структурной функции которых нет элементов с повторяющимися индексами y(X) представляют собой формы перехода к замещению. Производя замещение по указанным правилам получаем h(r).

Пример 1. Пусть $y(X) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, замещая получим $h(r) = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$

Пример 2. Пусть $y(x) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3}$, замещая получим

$$h(r) = 1 - (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_{3)}$$

Пример 3. Пусть $y(X) = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3) \vee (x_2 \cdot x_3)$. Это сложная функция имеет повторяющиеся элементы. Поэтому она не приводится сразу к ФПЗ.

Отметим некоторые основные свойства функции надежности.

Лемма 1 [3]. Для функции надежности имеет место следующее равенство:

$$h(r) = r_1 h(1_1, r) + (1 - r_1) h(0_1, r), \qquad t = \overline{1, N}. \qquad (2.63)$$

Из (2.63) следует, что *h(r)* мультилинейна, т.е. линейна по каждому из аргументов r_1. Более того, если $r_1 = r_2 = \ldots = r_м = r$ функция *h(r)* полиномиальна по r .

Напомним, что монотонные структуры имеют возрастающие по своим аргументам структурные функции. Соответствующее свойство монотонности функции надежности утверждается следующей леммой.

Лемма 2. **[2].** Пусть *h(r)* - функция надежности монотонной системы. Тогда *h(r)* строго возрастает по каждому из аргументов r_1 для $\mathbf{0 < r < 1}$.

(a « b ↔ $a_1 < b_1$ для всех *i*).

В теории надежности существует большое число методов расчета надежности. Целью этих методов является установление конкретного вида функции надежности *h(r)* на основе знания структуры *y(X.)* и вычисление значений R_c по известным значениям показателей надежности элементов r_1. Получение точного выражения для функции надежности многокомпонентных систем и, следовательно, точное вычисление ее значений обычно представляет собой достаточно громоздкую задачу. Поэтому наряду с методами точного расчета показателей существуют методы получения граничных оценок функции надежности. Если точные методы расчета надежности систем позволяют получить единственное значение показателя $R_c = h(r)$, то приближенные метода дают два значения: верхнюю R_c^B и нижнюю R_c^H граница показателя надежности, т.е. дают возможность утверждать, что показатель надежности системы находится в пределах $\boldsymbol{R_c^H < R_c < R_c^B}$. Ниже будут рассмотрены наиболее распространенные методы расчета ВБР и КГ.

Глава 3. Методы расчета показателей надежности

3.1. Метод расчета показателей надежности с помощью алгоритма разрезания

Данный метод относится к логико-вероятностным методам (ЛВМ), т.е. к методам, использующим аппарат математической логики. Сущность ЛВМ заключается в использовании функций алгебры логики (ФАЛ) для записи структурной функции и в разработке строгих способов и алгоритмов перехода от *ФАЛ к* вероятностной функции (ВФ), т.е. перехода от структурной функции *y(X)* к функции надежности *h(r).*

В общем случае структурная функция имеет форму произвольной ФАЛ и поэтому непосредственный переход к функции надежности по правилам замещения невозможен.

Рассмотрим алгоритм вычисления вероятности истинности ФАЛ **P** [y(X) = 1] с помощью формулы полной вероятности.

Алгоритм разрезания основан на лемме 1., согласно которой структурную функцию можно представить в виде

Таким образом, если аргумент x_1 функции *y* является совместной двоичной переменной,

$$y(X) = x_1 y_1(1_1, X) \vee \overline{x_1} y_0(0_1, X). \qquad (3.1)$$

то преобразование (3.1) дает нам возможность перейти к дизъюнкции двух несовместных высказываний, причем в первое высказывание аргумент x_1 входит своим утверждением, а во второе - отрицанием. Функции y_1 и y_0 отличаются от функции *y* тем, что в них везде вместо аргумента x_I**,** поставлены соответственно 1 и 0 (в соответствиям с этим выбраны и индексы функций y_I и y_0).

Аргументы x_I и можно принять за несовместные гипотезы, образующие полную группу и, следовательно, есть все основания применять формулу полной вероятности. Необходимо также, чтобы функции y_I и y_0 были бы представлены в ФПЗ. С этой целью процедуру разрезания повторяют несколько раз, пока не достигнут требуемой формы функций. На первом шаге разрезание функции *y(X)* производится по той из переменных, которая большее количество раз встречается в выражении функции. После первого шага получают разложение (3.1)). Затем функции y_I и y_0 упрощаются по правилам алгебры логики (если это

$$y_1 = x_J y_{11}(1_j, X) \vee \overline{x_J} y_{10}(0_J, X), \qquad (3.2))$$

$$y_0 = x_k y_{01}(1_k, X) \vee \overline{x_k} y_{00}(0_k, X), \qquad (3.3.)$$

$$y = x_1(x_J y_{11} \vee \overline{x_J} y_{10}) \vee \overline{x_1}(x_k y_{01} \vee \overline{x_k} y_{00}), \qquad (3.4)$$

возможно) и анализируются на предмет наличия в них, повторяющихся переменных. При наличии таких переменных процедура разрезания применяется к y_I и y_0

Операция разрезания проводится до тех пор, пока на очередном шаге не окажется, что ни в одну функцию, ни одна переменная не входит более одного раза. Таким образом, мы получим дизъюнкцию, каждый член которой представляет собой бесповторную ФАЛ, в общем случае произвольную. Применив к y_{p1}, где *p1*- множество индексов типа 0,1,01,11,..., правило де Моргана, получим бесповторную ФАЛ в оазисе конъюнкция-отрицание. Такая форма ФАЛ является ФПЗ. В результате выполнения алгоритма разрезания исходная ФАЛ преобразуется к виду

$$y(X) = \mathop{\vee}_{i=1}^{S} H_1 Y_{\rho 1}(X), \qquad (3.5)$$

где S – число членов дизъюнкции,

$y_{\rho 1}(X)$ – бесповторные ФАЛ в базисе конъюнкция – отрицание,

H_1 - несовместные гипотезы образующие полную группу.

Например, если разложение (3.4) является окончательным, то раскрыв скобки будем иметь

В этом случае гипотезами будут

$$y = x_1 x_J y_{11} \vee x_1 \overline{x_J} y_{10} \vee \overline{x_1} x_k y_{01} \vee \overline{x_1 x_k} y_{00}. \qquad (3.6)$$

$$H_1 = x_1 x_J, H_2 = x_1 \overline{x_J}, H_3 = \overline{x_1}, x_k, H_4 = \overline{x_1}, \overline{x_k}.$$

$$[P[Y(X) = 1] = \sum_{i=1}^{S} [P[H_i][P[y \mid H_i], \qquad (3.7)$$

Функция **P** [y(X) = 1] вычисляется по формуле полной вероятности

где P [y|H$_i$] - условная вероятность работоспособного состояния системы при гипотезе H$_i$, причем

$$[P[y \mid H_i] = [P[Y_{\rho i}]. \qquad (3.8)$$

Тогда равенство (3.7) можно переписать в виде

$$[P[Y(X)=1]=\sum_{i=1}^{S}[P[H_i][P[Y_{\rho i}]. \qquad (3.9)$$

Отметим, что ФАЛ, характеризующие гипотезы H_i, представлены в форме бесповторной ФАЛ в базисе конъюнкция - отрицание, этой же формы представления мы добились посредством алгоритма разрезания и для $y_{\rho 1}$. Этот факт и дает нам возможность перейти от логической функции к ВФ. Осуществив замену в правой части равенства (3.9)) логических переменных вероятностными, а логических операций - арифметическими по правилам замещения, получим точное выражение для функции надежности, имея в виду, что

$$h(r)=[P[y(X)=1]. \qquad (3.10)$$

Подставив в *h(r)* значения показателей надежности элементов, получим точное значение показателя надежности системы

$$R_c=h(r). \qquad (3.11)$$

Пример 1. Найдем функцию надежности системы, ССН которой изображена на рис. 2. 3.

Структурная функция системы была получена в главе 2 (см. формулу 2.61):

$$y(X)=x_1x_4 \vee x_2x_5 \vee x_1x_3x_5 \vee x_2x_3x_4. \qquad (3.12)$$

Чтобы правильно применять правило разрезания, применяется следующий прием. Разрезание проводится по тому аргументу, который чаще всего повторяется в ФАЛ. В данном примере x_1, x_2 ,x_3 ,x4 повторяются дважды. Поэтому разрезание можно проводить по любому из этих аргументов, но лучше по x_3 , так как он диагональный элемент.

На первом шаге произведем разрезание по переменной x_3

$$y=x_3\underbrace{(x_1x_4 \vee x_2x_5 \vee x_2x_4)}_{y_1} \vee \overline{x_3}\underbrace{(x_1x_4 \vee x_2x_5)}_{y_0}.$$

Заметим, что y_0 - бесповторная ФАЛ, следовательно, дальнейшее разрезание этой функции не требуется. В функции y_1 все переменные встречаются дважды. Выберем одну из них, допустим x_5, и произведем по ней разрезание y_1

$$y_1=x_5\underbrace{(x_1x_4 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_2x_4)}_{y_{11}} \vee \overline{x_5}\underbrace{(x_1x_4 \vee x_2x_4)}_{y_{10}}.$$

Функция y_{11} является повторной, однако, если проделать алгебраические (булевы) преобразования, то получим:

$$y_{11}=x_4(x_1 \vee x_2) \vee (x_1 \vee x_2)=x_1 \vee x_2, \qquad (3.13)$$

т.е. получили бесповторную ФАЛ. Аналогично для y10

$$y_{10}=x_4(x_1 \vee x_2). \qquad (3.14)$$

Таким образом, все функции $y_{\rho j}$, входящие в выражение

$$y(X)=x_3(x_5y_{11} \vee \overline{x_5}y_{10}) \vee \overline{x_3}y_0. \qquad (3.15)$$

являются бесповторными ФАЛ. Применим к ним правило де Моргана, с тем, чтобы получить их в базисе конъюнкция - отрицание:

$$y_0 = x_1 x_4 \vee x_2 x_5 = \overline{\overline{x_1 x_4} \quad \overline{x_2 x_5}}, \tag{2.22}$$

$$y_{11} = x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1}\ \overline{x_2}}, \tag{2.23}$$

$$y_{10} = x_4 (x_1 \vee x_2) = x_4 \overline{\overline{x_1}\ \overline{x_2}}. \tag{2.24}$$

Раскроем скобки в выражении (3.15)

$$y(X) = x_3 x_5 y_{11} \vee x_3 \overline{x_5} y_{10} \vee \overline{x_3} y_0. \tag{3.19}$$

Гипотезами в (3.19)) являются

$$H_1 = x_3 x_5, \quad H_2 = x_3 \overline{x_5}, \quad H_3 = x_3. \tag{3.20}$$

В соответствии с формулой (2.15) имеем:

$$P[y(X)=1] = \sum_{i=1}^{S} [P[H_i][P[Y_{\rho 1}] = [P[x_3 x_5 = 1][P[\overline{\overline{x_1}\ \overline{x_2}} = 1] + P[x_3 \overline{x_5} = 1][P[x_4 \overline{\overline{x_1}\ \overline{x_2}} = 1] +$$
$$+ [P[\overline{x_3} = 1][P[\overline{\overline{x_1 x_4}\ \overline{x_2 x_5}} = 1]. \tag{2.27}$$

Выполнив замещение, получим выражение для функции надежности

$$h(r) = [P[y(X)=1] = r_3 r_5 [1-(1-r_1)(1-r_2)] + r_3 (1-r_5) r_4 [1-(1-r_1)(1-r_2)] +$$
$$+ (1-r_3)[1-(1-r_1)(1-r_2)] + (1-r_3)[1-(1-r_1 r_4)(1-r_2 r_5)]. \tag{3.22}$$

Если предположить, что r_I=r для всех i = 1..5, то

$$h(r) = 2r^2 + 2r^3 - 5r^4 + 2r^5. \tag{3.23}$$

3.2. Метод расчета показателей надежности с помощью алгоритма ортогонализации

В некоторых случаях переход от повторной ФАЛ к ВФ удобнее реализовать (например, с помощью ЭВМ) не по формуле полной вероятности, а с помощью теоремы сложения вероятностей несовместных событий. С этой целью был разработан специальный алгоритм, основанный на преобразовании произвольной ФАЛ в ОДНФ. Для описания алгоритма ортогонализации сформулируем два утверждения [3].

Утверждение 1. Отрицание элементарной конъюнкции ранга s

K1 = x1, x2, ….xs

эквивалентно дизъюнкции

В матричной форме записи логических функций данное преобразование имеет вид:

$$\overline{K_1} = \overline{x_1} \vee x_1 \overline{x_2} \vee ... \vee x_1 x_2 .... x_{s-1} \overline{x_s}. \tag{3.24}$$

$$\overline{K_1} = \overline{x_1 x_2 \dots x_s} = \begin{vmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \dots \\ \dots \\ \overline{x_s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{x_1} \\ x_1 \overline{x_2} \\ \dots. \\ \dots. \\ x_1 x_2 \dots x_{s-1} \overline{x_s} \end{vmatrix}. \qquad (3.25)$$

Утверждение 2. Булева функция *y(x1 x2,..., xM),* представленная в ДНФ в виде

$$y(x_{1^{\cdot}}, x_2, \dots., x_N) = \mathop{\vee}_{i=1}^{M} K_i, \qquad t \le 2^M, \qquad (3.26)$$

эквивалентна функции

$$y(x_1, x_2, \dots, x_N) = K_1 \vee \overline{K_1} K_2 \vee \overline{K_1}\ \overline{K_2} K_3 \vee \dots \vee \overline{K_1}\ \overline{K_2} \dots. \overline{K_{m-1}} K_m \qquad (3.27)$$

или в матричной форме записи:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_N) = \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \dots \\ \dots \\ K_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K_1 \\ \overline{K_1}\ K_2 \\ \dots \\ \dots \\ \overline{K_1}\ \overline{K_2} \dots \overline{K_{m-1}}\ K_m \end{vmatrix}. \qquad (3.28)$$

Если вместо каждого выражения K_i ($i \le m$) подставить его представление согласно (3.24)), то в результате приведения дизъюнкции (3.27)) к ДНФ (раскрытием скобок) получим ОДНФ булевой функции *y(x1 x2,..., xM)*

$$y(x_1, x_2, \dots, x_M) = \mathop{K_i}_{i=1}^{M} = \mathop{\vee}_{i=1}^{S} 0_i, \qquad (3.29)$$

где o_i - ортогональные члены функции *y(X)* записанной в ОДНФ;
S - число членов ОДНФ.

Преобразовав структурную функцию *y(X.)* к ОДНФ, можно приступить к вычислению функции надежности по формуле:

$$h(r) = [P\{y(X) = 1] = \sum_{i=1}^{S} [P[0_i = 1]. \qquad (3.30)$$

Пример 2. Как и в предыдущем примере, возьмем структурную функцию (3.12))

$$y(X) = x_1 x_4 \vee x_2 x_5 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_2 x_3 x_4. \qquad (3.31)$$

Заметим, что функция *y(X)* в выражении (3.31) представлена в ДНФ. Если бы она была записана в какой-либо другой форме (например, формула (2.62)), то перед применением алгоритма ортогонализации ее необходимо было бы преобразовать к ДНФ.

Пронумеруем члены ДНФ (3.31) следующим образом:

$$K_1 = x_1x_4, \quad K_2 = x_2x_5, \quad K_3 = x_1x_3x_5, \quad K_4 = x_2x_3x_4. \tag{3.32}$$

Запишем уравнение (3.31), используя (3.32) в матричной форме с учетом 3.28:

$$y = \mathop{\vee}_{i=1}^{4} K_i = \begin{vmatrix} K_1 \\ \overline{K_1}K_2 \\ \overline{K_1}\,\overline{K_2}\,K_3 \\ \overline{K_1}\,\overline{K_2}\,\overline{K_3}\,K_4 \end{vmatrix}. \tag{3.33}$$

Отрицание элементарных конъюнкций *K,* выразим с помощью преобразования (3.25):

$$\overline{K_1} = \begin{vmatrix} \overline{x_1} \\ x_1\,\overline{x_x} \end{vmatrix}, \quad \overline{K_2} = \begin{vmatrix} \overline{x_2} \\ x_2\overline{x_5} \end{vmatrix}, \quad \overline{K_3} = \begin{vmatrix} \overline{x_1} \\ x_1\,\overline{x_3} \\ x_1x_3\overline{x_5} \end{vmatrix}. \tag{3.34}$$

Определим следующие конъюнкции

$$\overline{K_1}\,K_2 = \begin{vmatrix} \overline{x_1} \\ x_1\overline{x_4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2x_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{x_1}x_2x_5 \\ x_1x_2\overline{x_4}x_5 \end{vmatrix}. \tag{3.35}$$

$$\overline{K_1}\,\overline{K_2}K_3 = \begin{vmatrix} \overline{x_1} \\ x_1\overline{x_4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{x_2} \\ x_2\overline{x_5} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1x_3x_5 \end{vmatrix} = x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}x_5, \tag{3.36}$$

$$\overline{K_1}\,\overline{K_2}\,\overline{K_3}K_4 = \begin{vmatrix} \overline{x_1} \\ x_1\overline{x_4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{x_2} \\ x_2\overline{x_5} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{x_1} \\ x_1\overline{x_3} \\ x_1x_3\overline{x_5} \end{vmatrix} \left| x_2x_3x_4 \right| = \overline{x_1}x_2x_3x_4\overline{x_5}. \qquad (3.37)$$

Подставив (3.35)-(3.37) в (3.33), окончательно получим

$$y(X) = \begin{vmatrix} x_1x_4 \\ \overline{x_1}x_2x_5 \\ x_1x_2\overline{x_4}x_5 \\ x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}x_5 \\ \overline{x_1}x_2x_3x_4\overline{x_5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ 0_4 \\ 0_5 \end{vmatrix}. \qquad (3.38)$$

Как видно из равенства (3.38), все члены этой дизъюнкции действительно попарно ортогональны. Равенство (3.38) по внешнему виду отличается от равенства (3.23), тем не менее, оно приводит к тем же самым количественным результатам. Действительно, в соответствии с формулой (3.30) имеем

$$h(r) = [P[y(X) = 1] = r_1r_4 + (1-r_1)r_2r_5 + r_1r_2(1-r_4)r_5 + r_1(1-r_2)r_3(1-r_4)r_5 +$$
$$+ (1-r_1)r_2r_3r_4(1-r_5). \qquad (2.45)$$

При одинаковой надежности всех элементов функция надежности системы примет вид

$$h(r) = 2r^2 + 2r^3 - 5r^4 + 2r^5. \qquad (2.46)$$

что полностью соответствует выражению (3.23).

Метод расчета надежности с использованием алгоритма ортогонализации достаточно трудоемок для ручных расчетов, но при использовании ПЭВМ - это один из эффективных методов практических расчетов структурно-сложных систем с большим числом элементов.

3.3. Рекурентный метод

Этот метод предложен И.А. Рябининым и основан на использовании теоремы сложения вероятностей совместных событий, в качестве которых здесь непосредственно выступают элементарные конъюнкций условий работоспособности системы, записанных в ДНФ с помощью кратчайших путей успешного функционирования [3].

$$y(x_1, x_2, ...x_m) = \bigvee_{l=1}^{d} \Pi_l$$

или минимальных сечений

$$y^{/}(x_1, x_2, ...x_m) = \bigvee_{j=1}^{n} S_j$$

Согласно этой теореме и приведенным выражениям, вероятность безотказной работы системы (или вероятность ее отказа) можно вычислить по формулам:

$$P\{y(x_1, x_2, \dots x_m) = 1\} = R_c = p\left\{\bigvee_{l=1}^{d} \Pi_l\right\} = \sum_l P(\Pi_l) - \sum_i \sum_j P(\Pi_i \wedge \Pi_j) +$$
$$+ \sum_i \sum_j \sum_k P(\Pi_i \wedge \Pi_j \wedge \Pi_k) - \dots + (-1)^{d-1} P(\Pi_1 \wedge \Pi_2 \wedge \Pi_d);$$

Аналогичное можно написать выражение для P(y) и по минимальным сечениям.

Несмотря на кажущуюся громоздкость формул расчеты надежности с помощью такого метода называются достаточно простыми. Для этого предполагается производить расчеты в табличной форме, чем и объясняется название данного метода расчета.

3.4. Алгоритм наращивания путей

Поиск наиболее рациональных методов преобразования ФАЛ в ВФ привел к созданию еще одного метода, у истоков которого стояли Л.Г.Акулова и авторы работ [3].

Этот алгоритм позволяет в ряде случаев упростить вычисление вероятностных функций ортогональных ФАЛ в рассмотренном ранее методе ортогонализации за счет частичного замещения [3].

3.5. Схемно-логический метод

Предложен Смирновым А.С. и впервые опубликован в 1971 г. [3].

Этот метод основан на том, что за счет применения релейно-контактной схемы (РКС) разложение повторной ФАЛ производится не по одному аргументу (как это делается в алгоритме разрезания), а сразу по повторяющейся комбинации аргументов, что при числе аргументов (N>20) дает существенный выигрыш.

Для практического применения в случае ССН большой размерности наиболее удобными можно считать алгоритмы ортогонализации, рекуррентный, наращивания путей. В случае небольшой размерности (N<20) - схемно-логический метод и метод разрезания.

Более подробное изложение рекуррентного метода, наращивания путей и счетно-логического метода можно найти в книге И.А.Рябинина [3].

В заключение следует отметить следующее.

Модели и методы расчета надежности на базе булевых функций получили широкое распространение в практике изучения надежности, Однако, необходимо сделать некоторые замечания о границах применимости и недостатках таких моделей надежности.

1. В рамках теории булевых функций каждый элемент может иметь только два уровня (1 или 0). Но отказ одного и того же элемента в зависимости от его типа может иметь совершенно различные воздействия на систему (например, отказ типа "обрыв" и отказ типа "короткое замыкание").

1. При построении булевых моделей считается, что мгновенные состояния элементов однозначно задают состояние системы в тот же момент времени. Это подразумевает, что временная последовательность отказов элементов не имеет значение.

Бинарность состояний элементов и системы часто бывает очень грубым приближением. Границы применимости булевых моделей в теории надежности и их недостатки следует искать исключительно в принципах построения этих моделей, поэтому и преодоление этих недостатков возможно при построении этих моделей. Эти вопросы выходят за рамки данного пособия. Более подробное изложение этих вопросов желающие могут найти в [3].

Глава 4. Определение функции надежности по дереву отказов

4.1. Деревья отказов

Выше были рассмотрены индуктивные методы расчета надежности. Сущность этих методов сводилась к тому, что при составлении математической модели системы вначале устанавливаются виды отказов элементов, затем определяют влияние отказа каждого элемента на работоспособность системы. Рассматривая сочетания возможных состояний элементов можно найти все неработоспособные состояния системы и определить вероятности появления этих состояний.

Однако, для сложных систем с большим числом элементов и связей между ними составление структурной схемы является довольно сложной задачей. При этом неизбежны методические ошибки, поскольку порой практически невозможно перебрать все возможные комбинации отказов элементов, приводящие к отказу системы.

Существенно более эффективным, а в ряде случаев единственным средством анализа логических связей в системе является дедуктивныйй метод. При этом методе создание математической модели начинают с одного или нескольких наиболее опасных неработоспособных состояний системы. Перевод в каждое из этих состояний считается завершенным, которое возникает в результате определенного сочетания первичных событий - отказов элементов.

Условия, при которых возникают завершающие события, сводят в логическую схему, которую изображают в виде ориентированного графа с ветвящейся структурой - дерева отказов.

Деревом отказов называют логическое дерево, в котором «дуги» представляют собой события отказа на уровне системы, подсистемы или элементов, а вершины - логические операции, связывающие исходные и результирующие события отказов. Дерево отказов начинается с единственного наибольшей важности события, которое называется вершинным событием (например, отказ системы), на следующем уровне располагаются события, называемые промежуточными, появление которых может привести к появлению вершинного события (согласно логической операции, которая связывает эти уровни); аналогичным образом дерево продолжается на последующих уровнях. Наиболее употребительными логическими операциями являются "И" и "ИЛИ".

При построении деревьев отказов используются символы, отличающиеся от применяемых в ССН. Состояния элементов (основные события) представляются окружностями. Вершинное, промежуточные события и логических операций изображаются прямоугольниками.

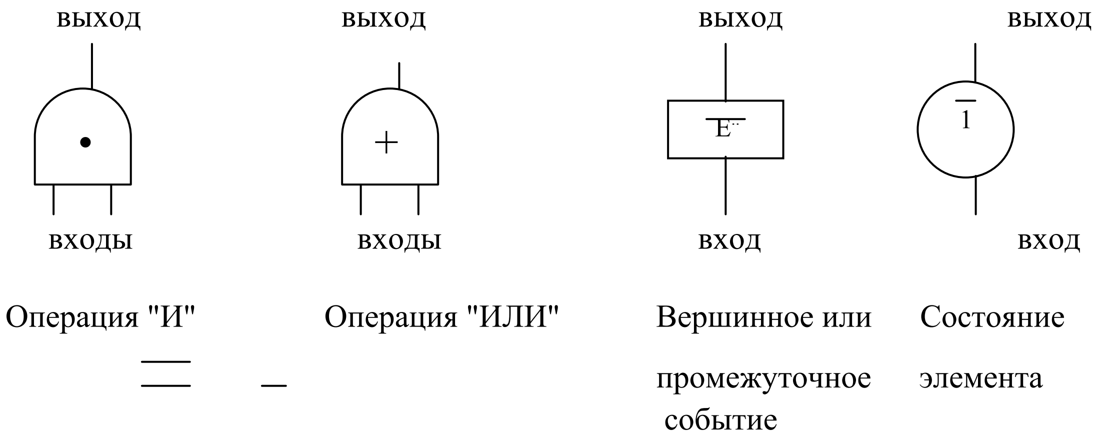


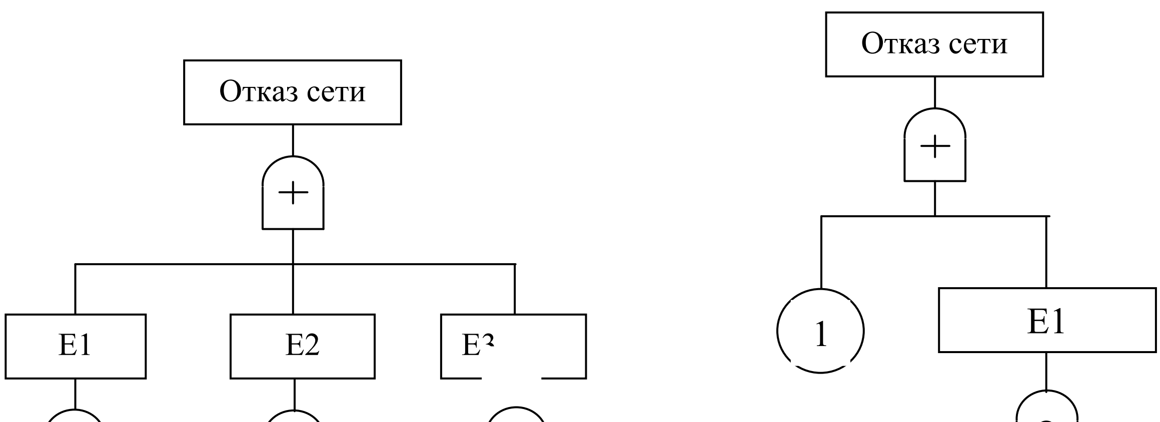
Рис. 4.1. Символы логических узлов, вершинных и основных событий в дереве отказов

Выходное событие узла "И" появляется тогда и только тогда, когда имеются все входные события. Выходное событие узла "ИЛИ" появляется тогда, когда на входе имеется хотя бы одно входное событие. В дальнейшем будем рассматривать деревья событий, содержащие только два типа логических узлов: "И" и "ИЛИ".

На рис. 4.2. представлены деревья отказов сети связи из примера главы 2 (три канала в сети передачи информации). Сравните их с соответствующими ССН, изображенными на рис. 2.2.

а)

б)



в) г)

Рис. 4.2. Примеры деревьев отказов информационной сети связи

а) последовательная структура, б) параллельная структура, г) структура «два из трех», в) последовательно-параллельная структура

Процедура построения дерева отказов во многом субъективна, она зависит от глубины знаний исследователя процессов функционирования системы и причинно-следственных связей возникновения отказов ее элементов. Два дерева отказов сложной многокомпонентной системы, построенные разными исследователями, но при одинаковых допущениях, внешне будут, скорее всего, отличаться друг от друга, однако приведут к одному и тому же конечному результату, если при этом не допускались методические ошибки.

4.2. Последовательность операций при построении деревьев отказов

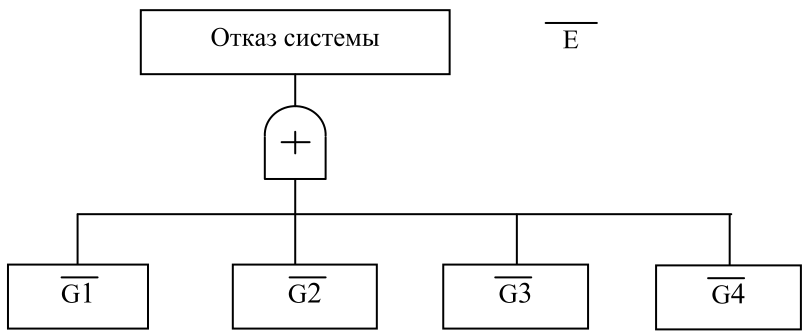
1. Построение начинается с выбора вершинного события, т.е. того события, вероятность появления которого следует оценить. Чаще всего таким событием является отказ системы. Далее необходимо определить, что считать отказом системы, т.е. необходимо сформулировать (или уяснить) критерий отказа системы. Для сложных систем это довольно трудная и ответственная задача. Для того, чтобы остаться в рамках бинарной модели, при исследовании порой приходится идти на компромиссы, некоторые искусственные приемы и упрощения реальных процессов функционирования системы. В большинстве случаев для промежуточных и основных событий критерий отказа очевиден.
2. После определения вершинного события и уяснения критерия его появления следует выделить в системе те компоненты, отказы которых могут вызвать это вершинное событие. Составляется список событий, заключающихся в отказе данных компонентов.
3. Данные события заносятся на схему дерева в соответствии с логикой работы системы.
4. Выбирается событие из составленного списка и решается, следует ли "проводить более детальный анализ данного события или нет. Если дальнейшему анализу событие не подлежит, то оно считается основным (на схеме этот факт отражается окружностью) и переходят к анализу последующего события . Если есть необходимость рассмотреть

причины появления данного события, то оно считается промежуточным. Список оставшихся событий ставится в очередь для последующего анализа. (Очередь организуется по принципу СТЕКА, т.е. вставший в очередь последним обслуживается первым.) Так продолжается до тех пор, пока в в списке не окажутся все основные события.

5. Если при рассмотрении очередного списка событий выяснится, что он состоит только из основных событий, то данный список изымается из очереди и из СТЕКА берется следующий список.
6. Вся процедура повторяется до тех пор, пока в очереди не окажется ни одного списка событий. Это будет означать, что все промежуточные события выражены через основные.

Пример. Построим дерево отказов для фрагмента информационной системы (рис.2.3) и для того же критерия отказа, в соответствии с которым в подразделе 2 строилась ССН системы.

1. Очевидно, что вершинное событие - это отказ рассматриваемого фрагмента системы. Обозначим его через Е.
2. Обозначим события, заключавшиеся в отказе элементов соответственно: событие B_1 отказ элемента 1, событие B_2 - отказ 2, B_3 - 3, B_4 - 4, B_5 - 5. Выделим в схеме такие компоненты, отказ которых непосредственно приводит к отказу системы. Такими компонентами будут: подсистемы входных контуров, т.е. G_1^* = (l, 2}, подсистема – G_2^* = *(*4, 5), компонент, представляющий собой совокупность 3-х элементов – G_3^* = {1, 3, 5), и компонент G_4^* = { 2, 3, 4}. Составляем список событий A_1:
3. Заносим события на схему дерева отказов.
4. Анализируем имеющийся список A_1. Выбираем из него событие G_1. Оно является промежуточным, т.к. представляет собой совокупный отказ 2-х элементов: 1 и 2, следовательно, подлежит дальнейшему анализу.

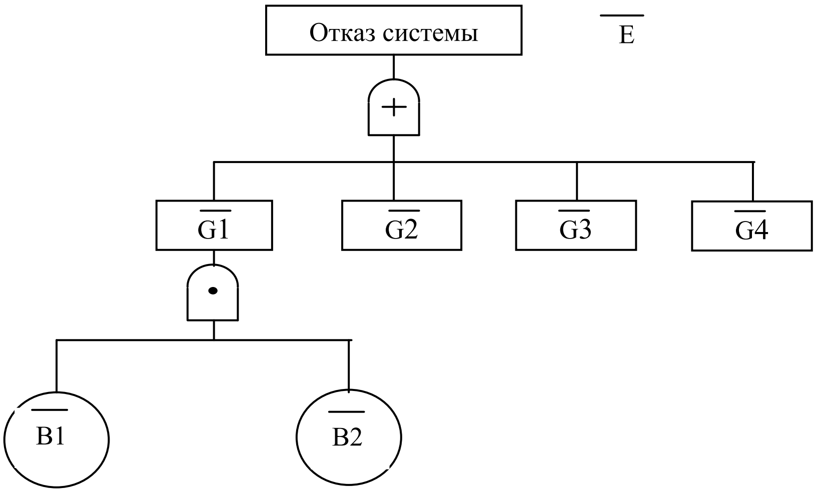


$A_1 = \{\overline{G_1}, \overline{G_2}, \overline{G_3}, \overline{G_4}\}$ *, где буквами* $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$, $\overline{G_3}$, $\overline{G_4}$ *– обозначены события, заключающиеся в отказе соответствующих элементов* G_1^*, G_2^*, G_3^*, G_4^*.

Помещаем список A_1 *без события* $\overline{G}1$ *в СТЕК, а для* $\overline{G}1$ *составляем свой список событий, приводящих к его появлению. Таким списком будет список* $A_2 = \{\overline{B}1, \overline{B_2}\}$.

Отказ компонента $\overline{G}1$ *наступает тогда и только тогда, когда откажут элементы* 1,2, *поэтому события* $\overline{B}1$ *и* $\overline{B_2}$ *вызывают событие* $\overline{G}1$ *в соответствии с логической операцией "и".*
Заносим события на схему дерева.

5. Анализируем имеющийся список. Он полностью состоит из основных событий, поэтому нет надобности заносить его в СТЕК.



6.*Извлекаем из СТЕКА хранящийся там список* A_1. *Выбираем из него событие* $\overline{G}2$. *Это событие промежуточное, следовательно, необходим его анализ. Возвращаем список* A_1 (*но уже без события* $\overline{G}2$) *в СТЕК, а для* $\overline{G}2$ *составляем список событий, которые вызывают это событие*:
$A_3 = (\overline{B}4, \overline{B}5)$.

7.*Аналогичным образом, продолжая анализ событий* $\overline{G}3$ *и* $\overline{G}4$, *получим списки* $A_4 = \{\overline{B}1, \overline{B}2, \overline{B}3\}$ *и* $A_5 = \{\overline{B}2, \overline{B}3, \overline{B}4\}$.

8. В результате выполнения всей процедуры получим дерево отказов системы, изображенное на рис. 4.3.

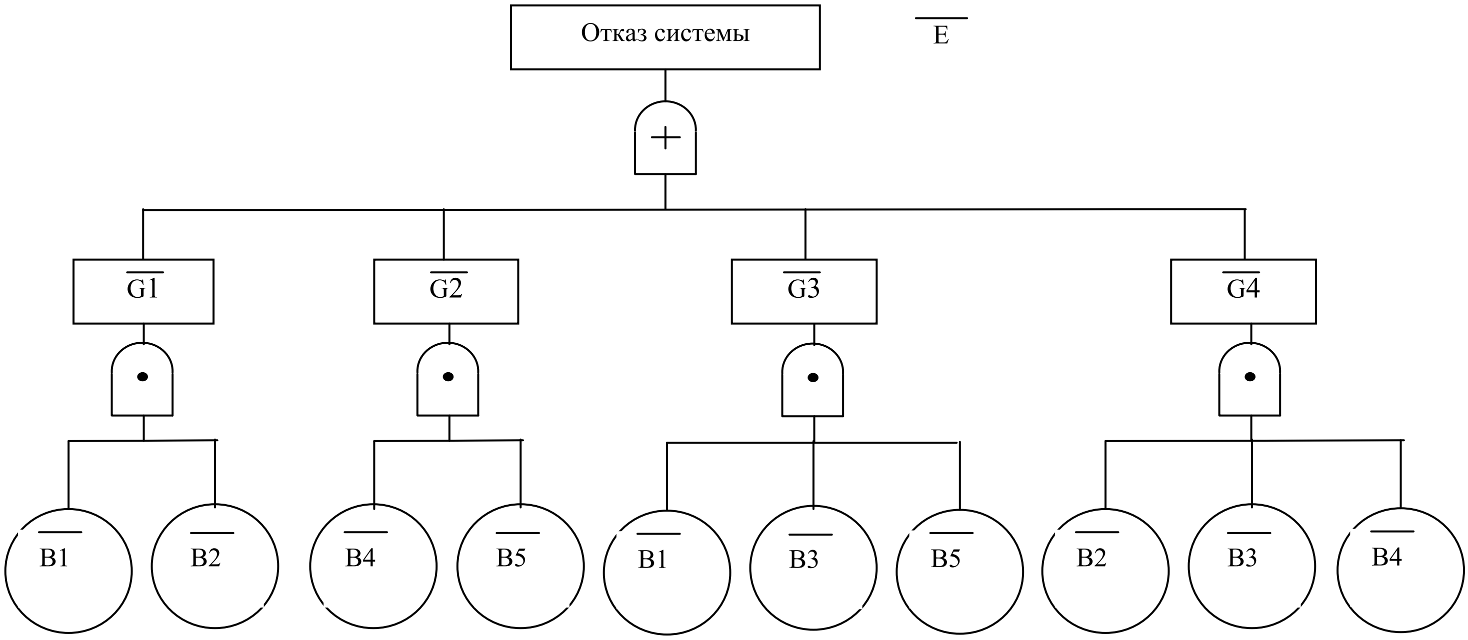
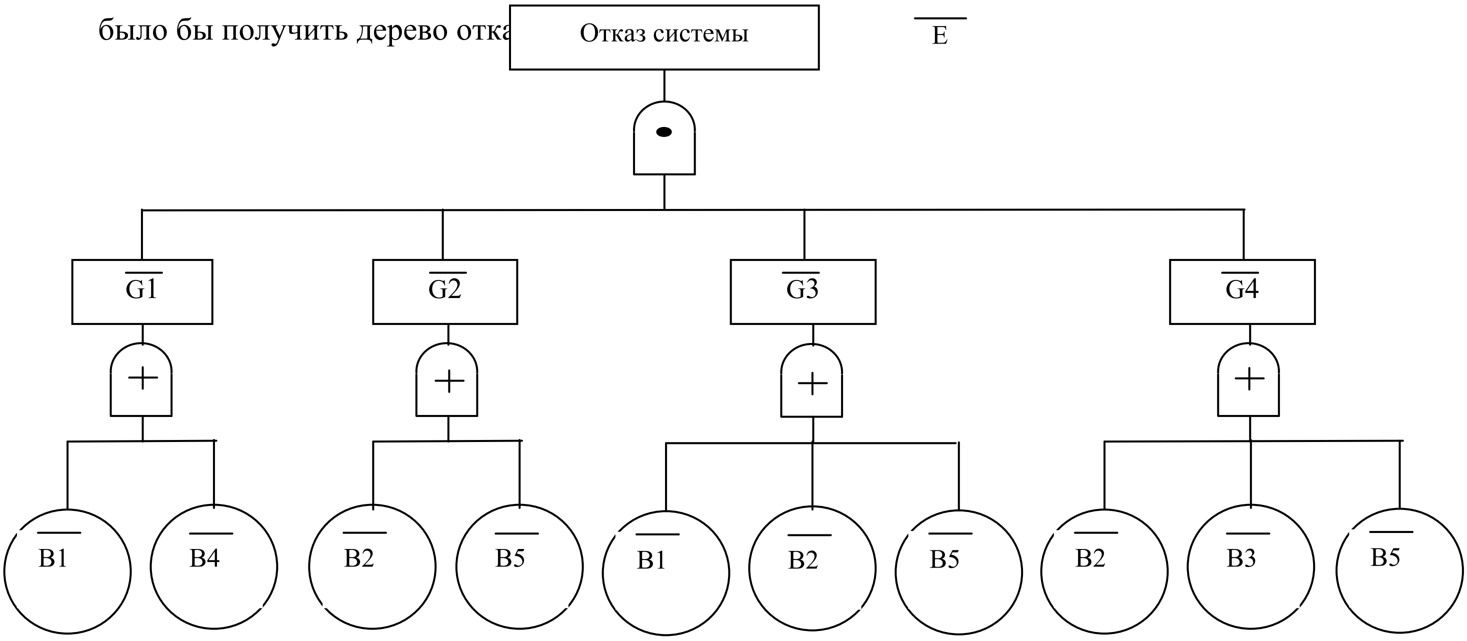


Рис. 4.3. Дерево отказов мостиковой системы

Рассуждая несколько по иному при выделении компонентов первого уровня, можно было бы получить дерево отка



Эти рассуждения предлагается в качестве упражнения проделать самостоятельно.

Сравните полученные деревья отказов мостиковой системы с ее структурными схемами надежности, изображенными на рис.2.4.

4.3. Алгоритм нахождения минимальных сечений в дереве отказов

Определение. Сечение- это совокупность основных событий, осуществление которых вызывает наступление вершинного события.

Определение. Минимальным сечением называется сечение удаление из которого хотя бы одного основного события приведет к тому, что оставшееся множество событий уже не будет сечением.

Рассматриваемый алгоритм основан на том факте, что узел "И" увеличивает размерность сечения, а узел "ИЛИ" увеличивает число сечений. Каждая логическая схема заменяется событиями на ее входе и так продолжается до тех пор, пока все логические схемы дерева не будут заменены на основные события. Систематический поиск позволяет найти некоторое множество сечений. Как правило, в это множество войдут не все возможные сечения, но обязательно – все минимальные сечения. После этого сравнительно просто определить минимальные сечения.

Проиллюстрируем суть алгоритма поиска минимальных сечений с помощью примера. Рассмотрим дерево отказов, изображенное на рис. 4.4.:

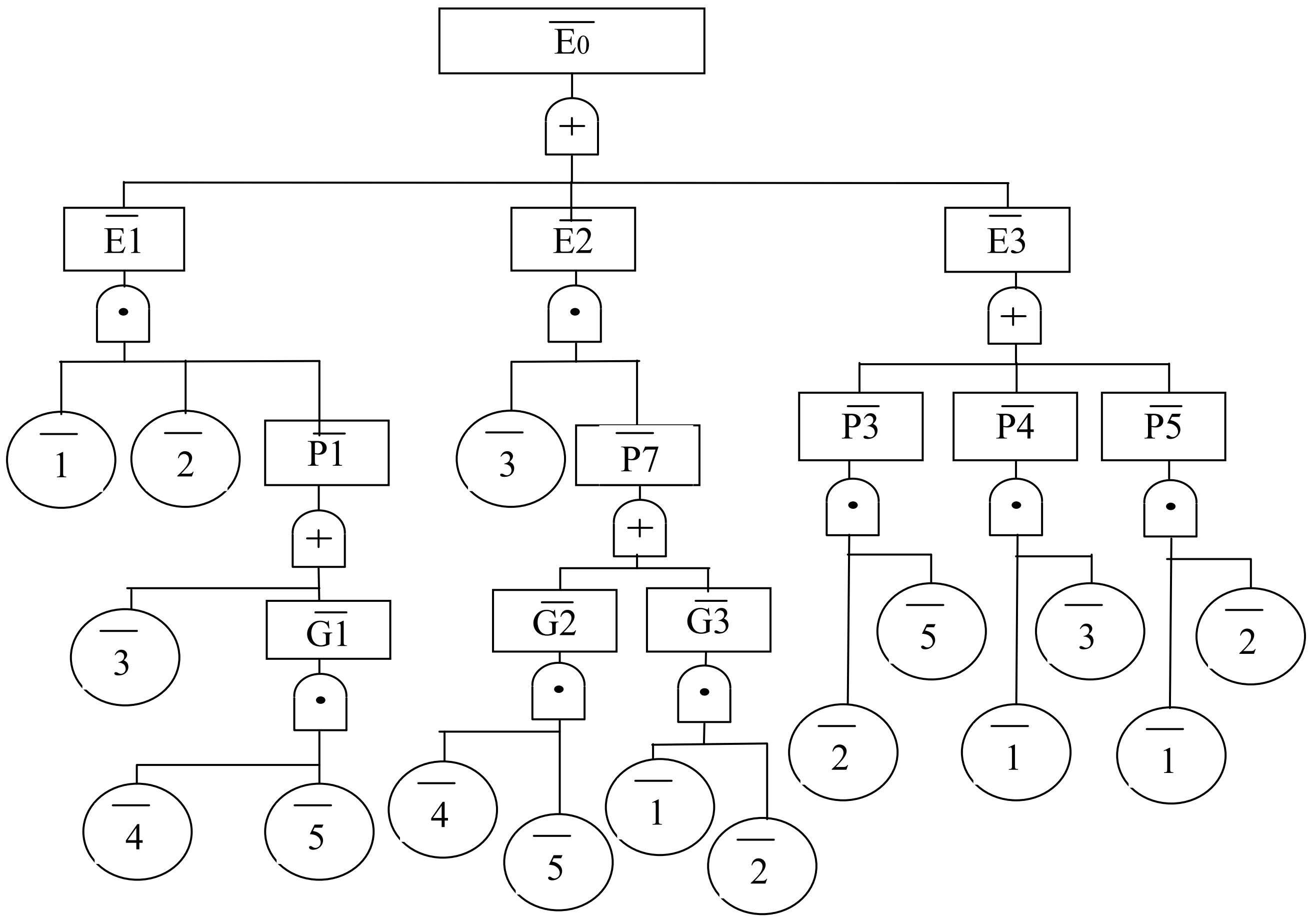


Рис. 4.4. Дерево отказов для примера

Продвигаясь на один уровень ниже от вершинного события проходим через узел "ИЛИ", который указывает на существование трех сечений:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{E_1} \\ \overline{E_2} \\ \overline{E_3} \end{array}}$$

1-й шаг

Анализируем событие $\overline{E1}$. Его логический узел "И", следовательно он увеличивает размерность сечения

$$\boxed{\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{P_1}}$$

$$\begin{array}{l} \overline{E_2} \\ \overline{E_3} \end{array}$$

2-й шаг

Логический узел события $\overline{P1}$ - "ИЛИ", он увеличивает число сечений:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \overline{1}, & \overline{2}, & \overline{3} \\ \overline{1}, & \overline{2}, & \overline{G_1} \end{array}}$$

$$\begin{array}{l} \overline{E_2} \\ \overline{E_3} \end{array}$$

3-й шаг

Узел при событии G1- "И"- увеличивает длину соответствующего сечения:

$$\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3}$$

$$\boxed{\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{7},\ \overline{4},\ \overline{5}}$$

4-й шаг

Аналогично рассматривая все промежуточные события получим матричный список сечений

$$\begin{array}{llll} \overline{1}, & \overline{2}, & \overline{3} & \\ \overline{1}, & \overline{2}, & \overline{4}, & \overline{5} \\ \overline{3}, & \overline{4}, & \overline{5} & \\ \overline{3}, & \overline{1}, & \overline{2} & \\ \overline{2}, & \overline{3} & & \\ \overline{1}, & \overline{3} & & \\ \overline{1}, & \overline{2} & & \end{array}$$

Одинаковые сечения
поэтому убираем $\overline{3}, \overline{1}, \overline{2}$

Получаем упорядоченный список возрастающих по размерности сечений

$\overline{1}, \overline{2},$
$\overline{1}, \overline{3}$
$\overline{2}, \overline{3}$
$\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$
$\overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$
$\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}$

Отметим, что в полученном матричном списке сечений все промежуточные события исключены и он полностью состоит из основных событий. Некоторые из этих сечений - минимальны, другие- нет. Например, 1, 2, 3 -сечение, но не минимальное, поскольку 1, 2 - также является сечением. Легко видеть, что минимальнымисечениями являются

$\overline{1}, \overline{2},$
$\overline{1}, \overline{3}$
$\overline{2}, \overline{3}$
$\overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$

Тогда $y(X)=(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_4 \vee x_5).$

$$y(X)=(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_4 \vee x_5)=x_1x_3 \vee x_2x_4 \vee x_1x_2x_5.$$

Разрезая по x_1 *и затем по* x_2 *получим*

$$y(X)=x_1x_2(x_3 \vee x_4 \vee x_5) \oplus x_1x_3\overline{x_2} \oplus \overline{x_1}\, x_2x_4.$$

Функция надежности $h(r)=r_1r_2[1-(1-r_3)(1-r_4)(1-r_5)]+r_1r_3(1-r_2)+r_2r_4(1-r_1).$

Если $r_i=r$

$$h(r)=2r^2+r^3-3r^4+r^5.$$

4.4. Определение функции надежности по дереву отказов

При построении дерева отказов могут оказаться повторяющиеся события. Для определения функции надежности эти повторы необходимо исключить, используя законы алгебры логики.

Пример. Пусть дано дерево отказов (рис. 4.5 а) с соответствующей структурной схемой надежности (рис. 4.6)

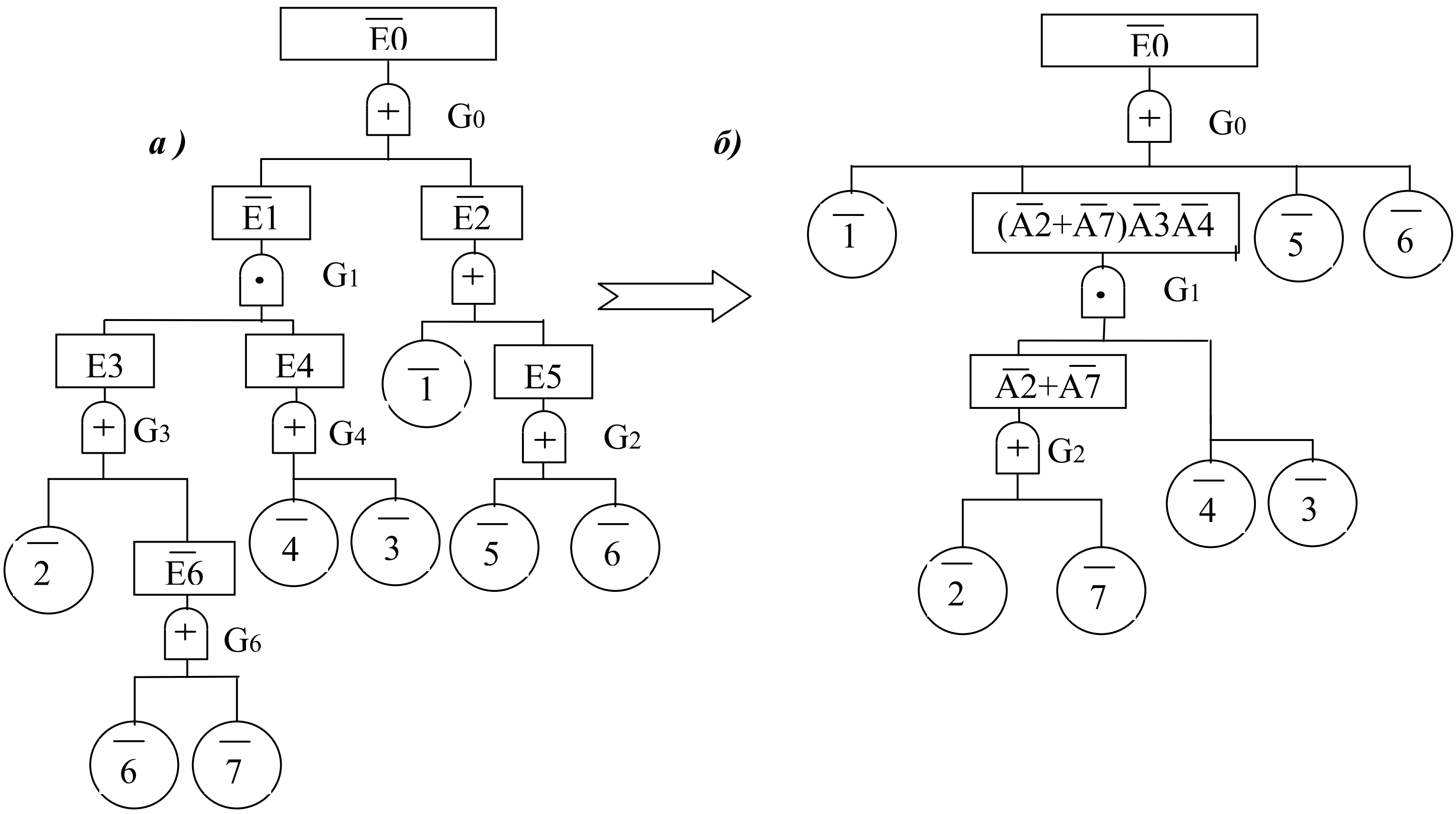


Рис. 4.5. Дерево отказов с повторяющимися событиями (а) и дерево отказов без повторяющихся событий (б)

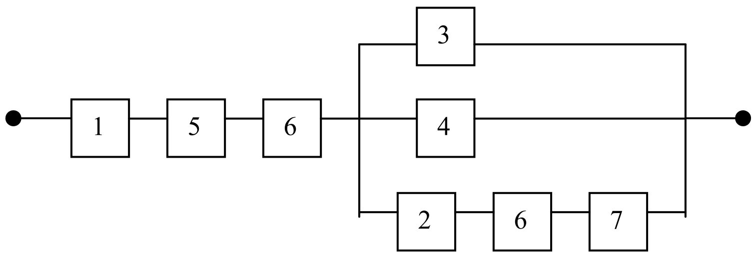


Рис. 4.6. Структурная схема надежности с повторами

В дереве отказов на рис. 4.5а есть повторы. Используя законы алгебры-логики получим.

$$\overline{E}_0=\overline{E}_1+\overline{E}_2;\quad \overline{E}_1=\overline{E}_3\cdot\overline{E}_4;\quad \overline{E}_2=\overline{A}_1+\overline{E}_5;\quad \overline{E}_3=\overline{A}_2+\overline{E}_6;\quad \overline{E}_4=\overline{A}_4+\overline{E}_3;$$

$$\overline{E}_5=\overline{A}_5+\overline{A}_6;\quad \overline{E}_6=\overline{E}_6+\overline{E}_7,\quad \textit{тогда}$$

$$\overline{E}_0=(\overline{A}_2+\overline{A}_6+\overline{A}_7)\,\overline{A}_3\,\overline{A}_4+\overline{A}_1+\overline{A}_5+\overline{A}_6.$$

Применив законпо поглощения получим $\overline{E}_0=\overline{A}_1+\overline{A}_3\,\overline{A}_4\,(\overline{A}_2+\overline{A}_7)+\overline{A}_5+\overline{A}_6.$

Для оценки функции надежности, применяя специальные алгоритмы, реализованные в виде программ, можно исследовать достаточно сложные схемы.

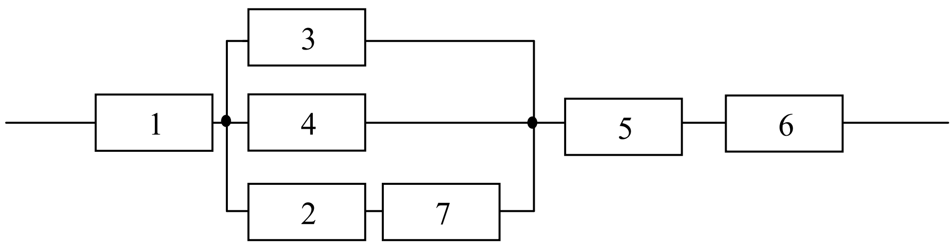


Рис. 4.7. Структурная схема надежности без повторов

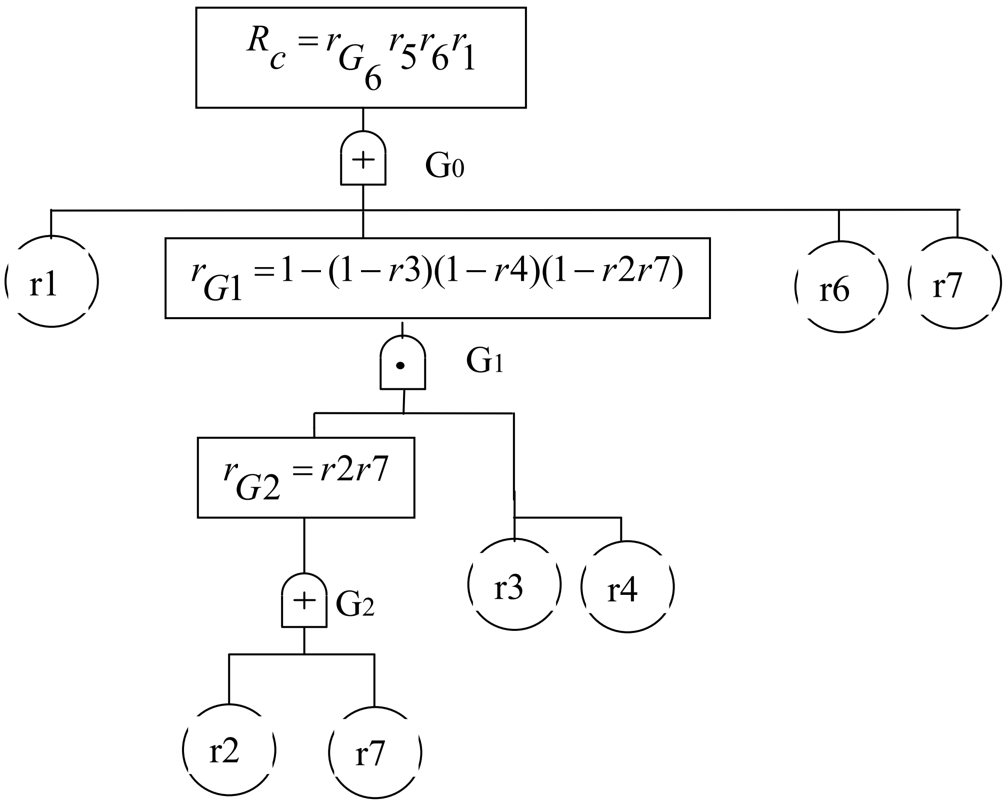


Рис. 4.8. Оценка функции надежности по дереву отказов рис. 4.5б

Глава 5. Граничные оценки показателей надежности

5.1. Определение границ показателей надежности

Вычисление показателей надежности сложных многоэлементных систем сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Однако, имея некоторые априорные сведения о системе (например, значения показателей надежности элементов), практически всегда можно выбрать метод, позволяющий получить верхнюю $R_c^в$ и нижнюю $R_c^н$ границы значения показателя надежности системы R_c с удовлетворяющей исследователя точностью.

Самые грубые границы для показателя надежности монотонной системы могут быть получены путем сравнения ее с последовательной и параллельной структурами. Действительно, если бы все элементы системы были бы соединены последовательно с точки зрения надежности (когда отказ любого элемента приводит к отказу системы), то система обладала бы наименьшей надежностью по сравнению с любой другой структурой. В то же время параллельное соединение всех элементов (отказ только всех элементов приводит к отказу системы) обладает максимальной надежностью по сравнению с другими структурами. Таким образом, нижняя граница и верхняя граница

$$R_c^н = \prod_{i=1}^{N)} r_i. \tag{1}$$

$$R_c^в = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1 - r_i). \tag{2}$$

являются соответственно наименьшей и наибольшей границами значения показателя надежности системы R_c (разумеется, если не рассматривать вырожденные оценки типа $0 \le R_c \le 1$, которые хотя и справедливы, но практической ценности не имеют). На рис.5а) изображены две кривые функции надежности системы, построенные согласно равенствам (1) и (2). Все остальные рассматриваемые ниже оценки будут лежать внутри заштрихованной области, за исключением оценок (2.68), которые, начиная с некоторых значений r_i, теряют физический смысл.

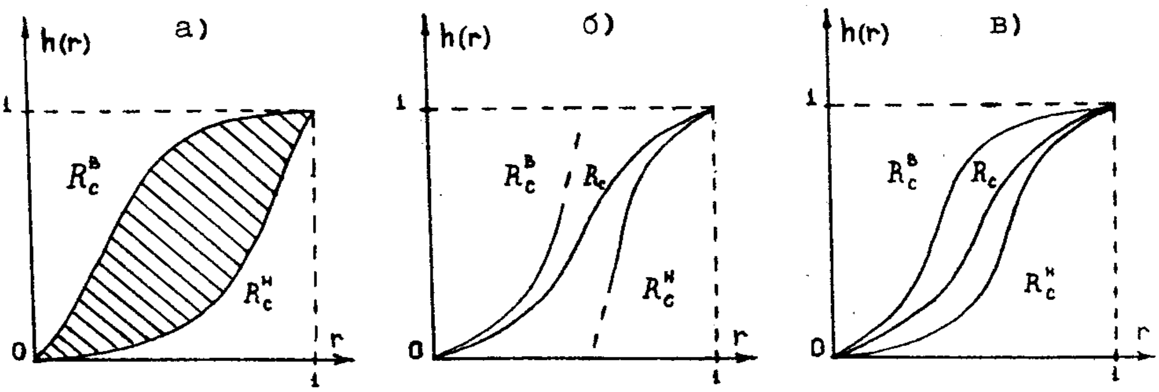


Рис. 5. Граничные оценки показателя надежности системы
а) согласно (1) и (2),
б) согласно неравенствам (17),
в) согласно неравенствам (21).

Хорошим инструментом для уточнения границ показателей надежности системы является ее представление через минимальные пути и минимальные сечения. Подавляющее большинство известных граничных оценок [2-4] основано на данном представлении монотонных систем. Простейшее из этих приближений вытекает из неравенства,

$$[P[\bigcup_{k=1}^{N} A_k] \le \sum_{k=1}^{N} [P[A_k]. \qquad (3)$$

справедливого для событий A_k

Это неравенство доказывается в теории вероятностей (например, при помощи диаграмм Вьенна).

Обозначим через $y_l^T(X)$ структурную функцию l-го минимального пути, а через $y_j^c(X)$ структурную функцию j-го минимального сечения. Тогда очевидно, что

где K_{Tl} и K_{Cj} - множества номеров элементов, содержащихся соответственно в l-ом пути и j-ом сечении.

Пусть A_l - событие, состоящее в том, что все элементы l-ого минимального пути работоспособны. Это эквивалентно равенству 1 структурной функции l-го минимального пути. Тогда

$$y_l^T(X) = \wedge_{i \in k_{Tl}} x_i. \qquad (4)$$

$$y_c^J(X) = \vee_{i \in k_{cJ}} x_i. \qquad (5)$$

$$[P[A_j] = [P[y_l^T(X) = 1]. \qquad (6)$$

Это событие эквивалентно событию, состоящему в том, что структурная

$$[P[\bigcup_{i=1}^{K_T} A_i] = [P[y(X) = 1], \qquad (7)$$

функция системы *y(X)* равна 1. Тогда

Событие $\bigcup_{i=1}^{K_T} A_j$ *заключается в том, что по крайней мере один минимальный путь работоспособен, т.е. работоспособна вся система.*

$$[P[y(X)] = 1] \le \sum_{i=1}^{K_T} [P[y_i^T(X) = 1] = R_c^в. \qquad (8)$$

где K_T - число минимальных путей системы. Подставив (7) и (6) в (3) и с учетом (2.62) получим

$$y(X) = \mathop{\wedge}_{j=1}^{K_C} y_j^c(x). \qquad (9)$$

т.е. верхнюю границу $R_c^в$ показателя надежности системы R_c.
Вычислим теперь нижнюю границу $R_c^н$ Согласно (2.60) и с учетом (5), структурная функция системы имеет вид
Применив к (9) правило де Моргана, получим

$$y(X) = \overline{\mathop{\vee}_{j=1}^{K_C} \overline{y_j^c(x)}}. \qquad (2.61)$$

Вычислим вероятностную функцию

$$[P[y(X) = 1] = [P[\overline{\mathop{\vee}_{j=1}^{K_C} \overline{y_j^c(x)}} = 1] = 1 - [P[\mathop{\vee}_{j=1}^{K_c} \overline{y_j^c(x)} = 1]. \qquad (2.62)$$

В соответствии с неравенством (3) можем записать

$$[P[\mathop{\vee}_{j=1}^{K_C} \overline{y_j^c(x)} = 1] \le \sum_{j=1}^{K_C} [P[\overline{y_j^c(x)} = 1]. \qquad (12)$$

Вычтем из правой и левой частей по 1 и умножим обе части на –1:

Тогда с учетом (11) окончательно получим

$$1 - [P[\mathop{\vee}_{j=1}^{K_C} \overline{y_j^c(x)} = 1] \ge 1 - \sum_{j=1}^{K_c} [P[\overline{y_j^c(x)} = 1]. \qquad (13)$$

$$R_c = [y(X) = 1] \ge 1 - \sum_{j=1}^{K_c} [P[\overline{y_j^c(x)} = 1] = R_C^H. \qquad (14)$$

Функция (4) представлена в форме элементарной конъюнкции (она характеризует элементарную последовательную структуру), такая форма является ФПЗ. Осуществив подстановки по правилам замещения в выражении для верхней границы (8), получим

$$R_c^{в} = \sum_{l=1}^{K_T} [P[y_i^T(X) = 1] = \sum_{l=1}^{K_T} [P[\bigwedge_{i\in K_{Tl}} x_i = 1] = \sum_{l=1}^{K_T} \prod_{i\in K_{Tl}} r_i. \qquad (15)$$

Аналогичные преобразования выполним для нижней границы (14):

$$R_c^{н} = 1 - \sum_{j=1}^{K_c} [P[\overline{y_j^c(x)} = 1] = 1 - \sum_{j=1}^{K_C} [P[\overline{\bigvee_{i\in K_{cj}} x_i} = 1] = 1 - \sum_{j=1}^{K_C} [P[\bigwedge_{i\in K_{cj}} \overline{x_i} = 1] = 1 - \sum_{l=1}^{K_t} \prod_{i\in K_{Tl}} (1 - r_i). \quad (16)$$

$$1 - \sum_{j=1}^{K_C} \prod_{i\in K_{Cj}} (1 - r_i) \le R_c \le \sum_{l=1}^{K_T} \prod_{i\in K_{Tl}} r_i. \qquad (17)$$

Таким образом, значение показателя надежности системы R_c лежит в пределах

Можно показать, что (8) является хорошим приближением для случая, когда надежность всех элементов системы мала, а (14) - хорошим приближением для случая, когда надежность всех элементов велика. На рис. 5б) изображены точное и приближенные значения показателя надежности системы.

Существенным недостатком граничных оценок вида (17) является тот факт, что при $r_i \to 1$ верхняя граница $R_c^в$ стремится к некоторой величине, большей 1, а при $r_i \to 0$ нижняя граница $R_c^н$ стремится к отрицательной величине, что противоречит определению показателя надежности как вероятности, согласно которому R_c всегда находится в пределах $0 \le R_c \le 1$, причем равенство нулю и единице имеет только математический смысл. Следующие граничные оценки показателя надежности системы, которые получили в литературе название оценок Эзари-Прошана, лишены данного недостатка. Но прежде чем приступить к их рассмотрению, введем понятие связанности случайных величин.

В большинстве практических случаев при анализе надежности рассматриваемые случайные величины являются скорее не независимыми, а связанными. Связанность случайных величин можно понимать как одну из форм положительной корреляции. В данном контексте мы имеем дело лишь с бинарными случайными величинами. Примером связанности является то, что различные минимальные пути системы имеют общие элементы (то же касается и минимальных сечений). Отказ одного из элементов приводит к тому, что ухудшаются характеристики всех минимальных путей, содержащих этот элемент. В этом случае имеется связанность соответствующих структурных функций $y_l^т(X)$ (или для сечений $y_j^c(X)$).

Сформулируем понятие связанности случайных величин в теории надежности. Две случайные величины S и T называются связанными, если их ковариация неотрицательна, т.е.

$$\mathrm{cov}[S,T] = M[(S - M[S](T - M[T])] \geq 0,$$

где M[ ] - символ математического ожидания.

Более сильным условием связанности является

$$\mathrm{cov}[f(S), g(T)] \geq 0$$

для всех возрастающих функций f и g. Наконец если

$$\mathrm{cov}[f(S,T), g(S,T)] \geq 0$$

для всех f и g, которые возрастают по каждому из аргументов, имеет место еще более сильное условие связанности.

Самый сильный из этих трех критериев может иметь естественное обобщение на случай нескольких переменных.

Определение 1. Случайные величины T_1 ,..., T_N (не обязательно бинарные) являются связанными, если

$\mathrm{cov}\,[\Gamma(\mathbf{T}), \Delta\mathbf{T}] \geq 0$, $\mathbf{T} = <$ T1 , T2 , ….. , TN $>$, для всех пар возрастающих бинарных функций Γ, Δ..

Если S и T связанные случайные величины, принимающие значения 1 с вероятностями $r_s = P\,[S = 1]$ и $r_т = P\,[T = 1]$ соответственно, то структурная функция вида

$$y(S,T)=S \wedge T$$

принимает значение 1 с вероятностью

$$R = [P\,[\,y\,(S, T = 1\,] = r_s r_t + \mathrm{cov}\,[\,S, T\,],$$

Приведенное выше понятие можно легко обобщить на случай связанных случайных величин T_1 ,..., T_N

$$[P[\bigwedge_{i=1}^{N} T_1 = 1] \geq \prod_{i=1}^{N}[P[T_1 = 1] = \prod_{i=1}^{N} r_i. \tag{18}$$

Естественно, что при рассмотрении дизъюнкции связанных булевых переменных можно записать

$$[P[\bigvee_{i=1}^{N} T_i = 1] = \overline{[P[\bigwedge_{i=1}^{N} T_i} = 1] = 1 - [P[\bigwedge_{i=1}^{N} T_i = 1],$$

но поскольку

$$[P[\bigwedge_{i=1}^{N} T_i = 1] \geq \prod_{i=1}^{N}[P[T_i = 1] = \prod_{i=1}^{N}[1 - [P\,[T_i = 1]] = \prod_{i=1}^{N}(1 - r_i),$$

получаем окончательно

$$[P[\bigvee_{i=1}^{N} T_i = 1] \leq 1 - \prod_{i=1}^{N}(1 - r_i). \tag{19}$$

Теперь, используя эти дополнительные сведения, перейдем непосредственно к получению граничных оценок для показателей надежности системы.

Граничные оценки получаются, если рассмотреть структурные функции (2.59) и (2.60), записанные соответственно для параллельного соединения минимальных путей и последовательного соединения минимальных сечений и учесть при этом неравенства (18) и 19. Действительно,

$$[P[y(X)=1]=[P[\bigvee_{l=1}^{K_T} \bigwedge_{i\in K_{Tl}} x_i=1]=[P[\overline{\bigwedge_{l=1}^{K_T} \overline{\bigwedge_{i\in K_{Tl}} x_i}}=1]=1-[P[\bigwedge_{l=1}^{K_T} \overline{\bigwedge_{i\in K_{Tl}} x_i}=1], \quad (2.71)$$

являются положительно коррелированными (отказы различных путей зависимы из-за того,

и поскольку события, соответствующие коньюнкции $\bigwedge_{i\in K_{Tl}} x_i$ *для всех* l

что подмножества элементов, составляющих различные пути, могут пересекаться), можем записать, используя неравенство (18)

$$[P[\bigwedge_{l=1}^{K_T} \overline{\bigwedge_{i\in K_{Tl}} x_i}=1]\ge \prod_{l=1}^{K_T}[P[\overline{\bigwedge_{i\in K_{Tl}} x_i}=1]=\prod_{l=1}^{K_T}[1-[P[\bigwedge_{i\in K_{Tl}}=1]]=\prod_{l=1}^{K_T}(1-\prod_{i\in K_{Tl}} r_i).$$

Итак, окончательно имеем

$$R_c=[P[y(X)=1]\le 1-\prod_{l=1}^{K_T}(1-\prod_{i\in K_{Tl}} r_i)=R_c^{в}.$$

Нижняя граница получается, если использовать второе, представление структурной функции системы (1.16)

$$R_c=[P[y(X)=1]=[P[\bigwedge_{j=1}^{K_c}\bigwedge_{i\in K_{Cj}} x_i=1]\ge 1-\prod_{j=1}^{K_c}(1-\prod_{i\in K_{Cj}}(1-r_i)=R_c^{н}.$$

Таким образом, границы Эзари - Прошана имеют вид

На рис. 2.2 в) приводится графическое сравнение точного значения функции надежности системы R_c с верхней и нижней ее границами.

$$R_c^{н}=1-\prod_{j=1}^{K_c}[(1-\prod_{i\in K_{cj}}(1-r_i)]\le R_c\le 1-\prod_{l=1}^{K_T}(1-\prod_{i\in K_{Tl}}(1-r_i)=R_c^{в}.$$

Существует еще целый ряд граничных оценок показателей надежности системы, которые дают различные по точности результаты и применяются в тех или иных случаях в зависимости от априорной информации о значениях показателей надежности элементов, многие из них имеют один общий недостаток, а именно: точность приближения целиком предопределена самой природой оценок и не зависит от желания исследователя. Ниже будет рассмотрен метод, который позволяет получить граничные оценки с заданной степенью приближения вплоть до получения точного значения показателя надежности системы. Этот метод носит название метода включения-исключения, он основан на применении теоремы сложения совместных событий.

Выберем в качестве структурной функции системы ее представление через минимальные пути (2.59) и запишем выражение для функции надежности

$$h = [P[\bigvee_{l=1}^{K_T} T_l = 1].$$

Согласно теореме сложения вероятностей совместных событий

$$[P[\bigvee_{l=1}^{K_T} T_l = 1] = \sum_l [P[T_l = 1] - \sum_l \sum_{k>l} [P[T_l \wedge T_k = 1] + \sum_l \sum_{k>l} \sum_{s>k} [P[T_l \wedge T_k \wedge T_s = 1] - \ldots.. +$$
$$+ (-1)^{K_T - 1} [P[T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots.. \wedge T_{K_{Tl}} = 1. \qquad (21)$$

Если обозначить Z_l, абсолютное значение l-го слагаемого правой части уравнения (21), где l = 1, …, $K_т$, то справедливо выражение

$$R_c = \sum_{l=1}^{K_T} (-1)^{l=1} Z_l. \qquad (22)$$

Тогда можно показать, что

$$R_c \le Z_1,$$
$$R_c \ge Z_1 - Z_2, \qquad (23)$$
$$R_c \le Z_1 - Z_2 + Z_3,$$

и т.д. Первое из этих приближений совпадает с (8). Необходимо отметить, что последовательные оценки верхних и нижних границ по (23) не обязательно сходятся монотонно. Практика показывает, что достаточно вычислить лишь несколько Z_l, чтобы получить достаточно хорошее приближение, точность которого можно задать заранее, например, в виде модуля разности | $R^в_{ci} – R^н_{ci-1}$ |. Тогда расхождение точного значения и границы будет меньше или равно этой величине, то есть

$$| R_c - R^в_{ci} | \leq | R^в_{ci} – R^н_{ci-1} |$$

или

$$| R_c – R^н_{ci-1} | \geq | R^в_{ci} – R^н_{ci-1} |$$

Если задать $| R^в_{ci} – R^н_{ci-1} | = 0$, то получим точное значение показателя надежности системы, которое будет вычислено по формуле (22).

5.2. Расчет средней наработки системы на отказ и среднего времени ее восстановления

В данном подразделе будет показан способ вычисление временных показателей надежности структурно-сложных восстанавливаемых систем - средней наработки на отказ $M[T^р_c]$ и среднего времени постановления работоспособности $M[T^в_c]$.

Рассмотрим процесс функционирования произвольного, i-го элемента восстанавливаемой системы. После первого периода работоспособного состояния элемента $T^р_{i1}$ происходит его отказ и наступает период восстановления $T^в_{i1}$, необходимый для диагностирования, проведения восстановительных мероприятий (замены, регулировки, ремонта), включения элемента в работу. Затем наступает второй промежуток времени $T^р_{i2}$ работоспособного состояния, после чего следует вновь отказ, вновь восстановление и т.д. Состояние $x_i(t)$ меняется со значения 0 (отказ) на значение 1 (работоспособность) и наоборот. Как продолжительность работоспособного состояния, так и длительность восстановления - случайные величины. Таким образом, $x_i(t)$ является бинарным случайным процессом.

В предположении, что случайные величины $T^р_{i\nu}$, $\nu = 1, 2,...$ имеют одно и то же распределение $F(t)$, случайные величины $T^в_{i\nu}$, $\nu = 1,2,...$- одно и то же распределение $G(t)$, и все случайные величины $T^р_{i\nu}$, $T^в_{i\nu}$ независимы друг от друга, процесс
$\{ x_i(t), t > 0\}$ будет являться альтернирующим процессом восстановления.

Вероятность работоспособного состояния i-го элемента в момент t называется нестационарным коэффициентом готовности и обозначается kгi(t) :

$$k_{Гi}(t) = [P[x_i(t) = 1].$$

С ростом t функция k_{ri} стремится к стационарному значению. Его величина получается как отношение средней длительности работоспособного состояния (средней наработки) к средней длине цикла процесса

$$k_{Гi} = \lim_{t \to \infty} k_{Гi}(t) = M[T_i^P]/(M[T_{i0}^P] + M[T_i^в]). \qquad (6.1)$$

Аналогично для КГ системы

$$K_{Г} = \lim_{t\to\infty} K_{Г}(t) = M[T_c^P] / M[T_c^P] + M[T_c^в]. \qquad (6.2)$$

При анализе структурной надежности, который проводится, как правило, на этапах проектирования, КГ системы вычисляется не по формуле (6.2), поскольку система не была еще в эксплуатации и, следовательно, нет возможности статистически оценить величины $M[T^*_c]$, а по известным значениям k_{ri}, $i = 1, \ldots, N$, которые подставляются в выражение для функции надежности

$$K_r = h(\mathrm{k}_r), \qquad \mathrm{k}_r = < k_{r1}, k_{r2}, \ldots, k_{rN} >.$$

Функция надежности $h(\mathrm{k}_r)$ может быть получена одним из методов, описанных выше. Значения k_{ri} определяются статистически, либо по результатам специальных испытаний, либо по данным, накопленным в ходе эксплуатации элементов в составе других аналогичных систем.

Среднюю наработку системы на отказ можно вычислить по формуле [4]

$$M[T_c^P] = K_{Г}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{k_{Гi}}{M[T_i^P]} \times \frac{\partial h(k_{Г})}{\partial k_{гi}}\right]^{-1}. \qquad (6.3)$$

Отсюда, используя формулу (6.2)), найдем среднее время восстановления работоспособного состояния системы:

$$M[T_c^в] = \frac{1 - K_{Г}}{K_{Г}} M[T_c^P], \qquad (6.4)$$

Глава 6. Оценивание надежности систем при отсутствии статистических данных об отказах элементов

6.1. Вводные замечания

В рамках изложенных выше методов анализа надежности структурно-сложных систем предполагались известными точные значения показателей надежности элементов системы. Для многих систем, однако, часто затруднительно оценить вероятность отказов некоторых элементов по прошлой информации. Причиной этого может являться неопределенность будущих условий эксплуатации. Кроме того, часто необходимо учитывать возможные отказы таких элементов системы, которые ранее не отказывали вообще.

В этом случае вместо вероятности отказа может быть использовано понятие возможности отказа в виде нечеткого множества (НМ) [4], определенного в вероятностном пространстве. В рамках данной концепции могут быть одновременно рассмотрены вероятность и возможность как различные аспекты неопределенности, при этом задаются значения степени неопределенности для каждого значения вероятности отказа. Например, если существует информация о том, что "значение вероятности отказа лежит в пределах между 0.01 и 0.1 и, возможно, вблизи 0.07", то эта информация может быть формализована посредством задания нечеткого множества, отражающего возможность отказа. Возможность отказа в предельном случае совпадает с вероятностью отказа и, таким образом, данный подход может быть в некоторых случаях более продуктивным и полезным, чем традиционный метод анализа неопределенности, связанный с исследованием лишь вероятности отказа. В то же время нечеткая форма представления информации о надежности отличается от привычной классической формы описания в виде точечных, либо интервальных статистических оценок ВБР. (В данном подразделе в качестве показателя надежности для определенности будем рассматривать ВБР.) В связи с этим возникает вопрос о путях использования результатов нечеткого оценивания показателей надежности элементов сложных систем.

Здесь можно.выделить, по крайней мере, три направления.

1. Результаты нечеткого оценивания ВБР элементов сложной системы могут быть использованы в качестве исходных данных для дальнейших расчетов показателей надежности системы в целом.

2. Если известны требования к безотказности элемента (системы), то по результатам нечеткого оценивания ВБР может быть решена задача о проверке выполнения этих требований.

3. Нечеткая ВБР может быть преобразована к обычному (четкому) виду.

Кратко поясним особенности решения перечисленных задач.

6.2. Анализ надежности системы при нечетком оценивании надежности ее элементов

Анализ надежности систем при нечетком оценивании надежности ее элементов представляет значительный практический интерес. Прежде всего к нему сводится оценка надежности системы по результатам испытаний ее компонент. В результате испытаний элементов системы получаем сравнительные показатели надежности элементов.

Как в этом случае получить доверительные пределы надежности системы? В настоящее время имеются решения только для отдельных частных случаев [3].

Представляя доверительные интервалы как нечеткое оценивание надежности можно решить весьма широкий круг задач.

Рассмотрим пример. Пусть заданы ССН системы и ее дерево отказов (см. рис

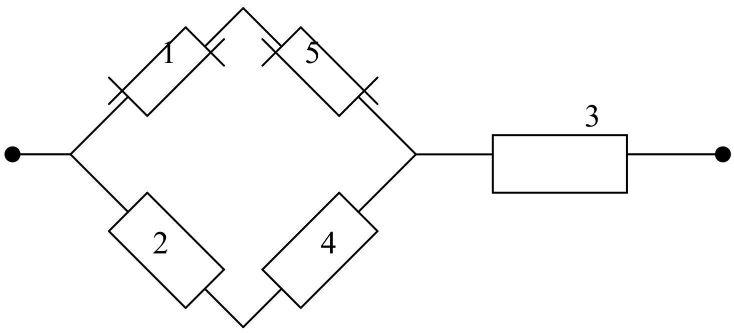


Рис. 6.1. Структурная схема надежности

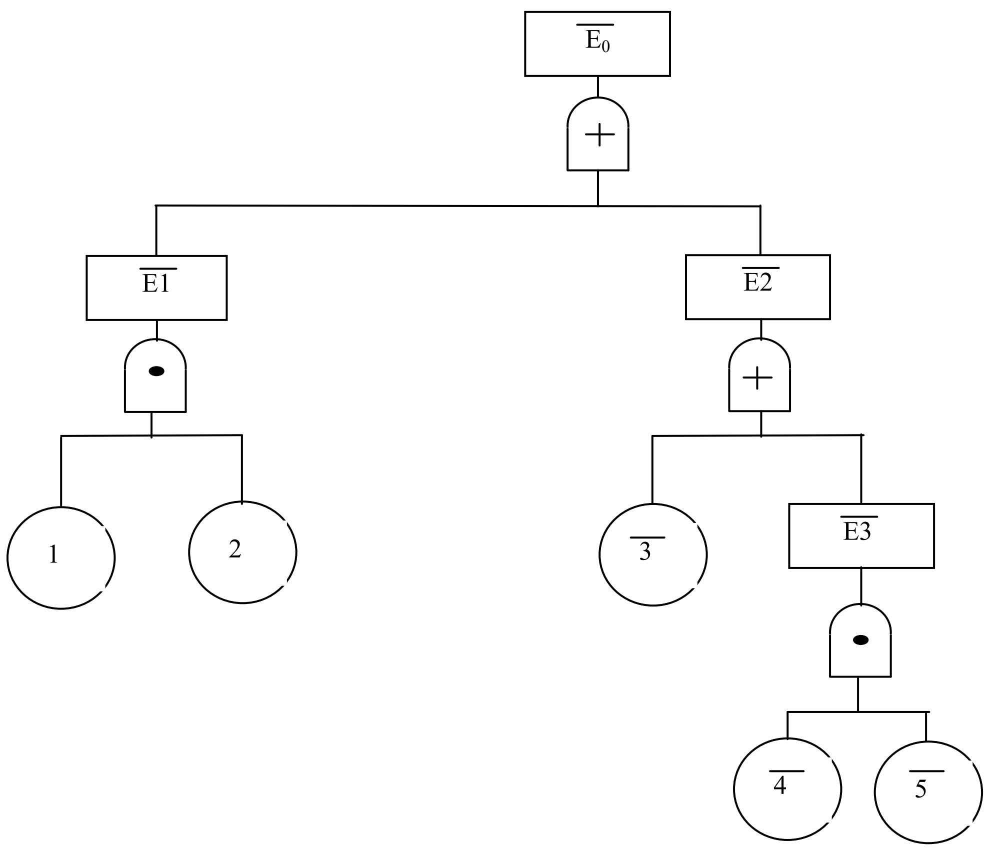


Рис. 6.2. Дерево отказов ССН, представленной на рис. 6.1.

Структурная функция *y(X),* построенная по данному дереву, имеет вид

$$y(X) = x_3(x_1 \vee x_2)(x_4 \vee x_5)$$

Будем считать, что элементы функционируют независимо.
Так как элементы на дереве отказов безповторны, то сразу можем получить h(r).

$$h(r) = r_3\left[1-(1-r_1)(1-r_2)\right]\left[1-(1-r_4)(1-r_5)\right]$$

Если известны вероятности работы элементов за заданное время t, то функция надежности может быть представлена следующим образом

$$h(p_1, p_2, ...p_5) = p_3[1-(1-p_1)(1-p_2)][1-(1-p_4)(1-p_5)], \qquad (6.1)$$

где p_i, i = 1, …, 5, есть значения ВБР элементов рассматриваемой системы.

Если ввести обозначение $q_i = 1 - p_i$ для вероятности отказа i-ого элементы, то формула (6.1) преобразуется к виду

и, соответственно, ВБР системы может быть вычислена по формуле

$$h(q_1, q_2, ...q_s) = (1-q_3)(1-q_1q_2)(1-q_4q_5), \qquad (6.2)$$

$$P=(1-q_3)\,(1-q_1q_2)(1-q_4q_5) \qquad (6.3)$$

Пусть вероятности q_i, $i=\overline{1,5}$ *заданы нечетко, т.е. в виде нечетких множеств* $\underset{\sim}{Q}_1 = \{<q_1, \mu_{\underset{\sim}{Q}_1}(q_i)>\}$. (6.4)

Если заданы нечеткие ВБР элементов вида

$$\underset{\sim}{P}_i = \{<p_i,\ \mu_{\underset{\sim}{P}i}\,(p_i)>\} \qquad (6.5)$$

то они легко могут быть преобразованы к НМ $\underset{\sim}{Q}_i$ по правилу:

$$\underset{\sim}{Q}_i = 1 - \underset{\sim}{P}_i = \{<(1-p_i), \quad \mu_{\underset{\sim}{P}} \quad \} \qquad (6.6)$$

Тогда, подставив выражение для $\underset{\sim}{Q}_i$ из (6.4.) в формулу (6.3), получим

$$\underset{\sim}{P}_1 = (1-Q_3)(1-Q_1Q_2)(1-Q_4Q_5). \qquad (6.7)$$

Для вычисления ВБР системы по формуле (6.7.) необходимо уметь осуществлять операции перемножения нечетких множеств и вычитания их из единицы. Данные операции реализуются с помощью принципа обобщения Л.Заде [8], согласно которому

$$\underset{\sim}{Q}_i\,\underset{\sim}{Q}_j = \{<q_{ij},\ \mu_{Qi\,Qj}\,(q_{ij})>\}$$

(6.8)

где $q_{ij} = q_i\, q_j$,

(6.9)

$$\mu_{Q_i Q_j}(q_{ij}) = sup \quad [\mu_{Q_i}(q_i) \wedge \mu_{Q_j}(q_j)] \qquad (6.10)$$

$$(q_i, q_j) \in \{(q_i, q_j) | (q_i, q_j)\} = Q_{ij}\}$$

$$1 - Q_i = \{ < p_i, \ \mu_{i - Q_i}(p_i) > \}, \qquad (6.11)$$

где $$p_i = 1 - q_i, \qquad (6.12)$$

$$\mu_{i - Q_i}(p_i) = \mu_{Q_i}(q_i), \qquad (6.13)$$

При произвольном виде функции принадлежности НМ (6.4) вероятность (6.7) можно вычислить лишь приближенно с помощью дискретизации непрерывных НМ [4]. Однако данный способ является достаточно громоздким и дает приближенные результаты. В работе [9] предлагается ограничиться функцией принадлежности трапецеидальной формы, что позволяет получить аналитические выражения для расчета ФП НМ $\underset{\sim}{P}$.

Пусть вероятность отказа i-го элемента сложной системы есть нечеткое множество вида

$$Q_1 = \{ < q_i, \mu_{\underset{\sim}{Q_i}}(q_i) \ >\} = (q_i^l; p_i^l; p_i^r; q_i^r) \quad , \qquad (6.14)$$

определяемое функцией принадлежности

$$\mu_{\underset{\sim}{Q_i}}(q_i) = \begin{cases} 0, & 0 \le q_i \le q_i^l, \\ 1 - \theta_i^l, & q_i^l < q_i \le p_i^l, \\ 1, & p_i^l < q_i \le p_i^r, \\ 1 + \theta_i^r, & p_i^r < q_i \le q_i^r, \\ 0, & q_i^r < q_i \le 1, \end{cases} \qquad (6.15))$$

где $$\theta_i^\alpha = \frac{p_i^\alpha - q_i}{\Delta p_i^\alpha}, \quad \Delta p_i^\alpha = p_i^\alpha - p_i^\alpha, \qquad \alpha = l, r.$$

График данной ФП изображен на рис. 6.3.

Можно показать (см. [9]), что произведение нечетких множеств $\underset{\sim}{Q}_i$ и $\underset{\sim}{Q}_j$. есть нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{\underset{\sim}{Q}_i \underset{\sim}{Q}_j}(q_{ij}) = \begin{cases} 0, & 0 \le q_{io} \le q_i^l q_j^l, \\ 1 - \phi_{ij}^l, & q_i^l q_j^l < q_{ij} \le p_i^l p_j^l, \\ 1, & p_i^l p_j^l < q_{ij} \le p_i^r p_j^r, \\ 1 + \phi_i^r, & p_i^r p_j^r < q_{ij} \le q_i^r q_j^r, \\ 0, & q_i^r q_j^r < q_{ij} \le 1, \end{cases} \tag{6.16}$$

где

$$\phi_{ij}^{\alpha} = h_{ij}^{\alpha} - [q_{ij}^{\alpha} + (h_{ij}^{\alpha})^2]^{1/2} \quad ,$$

$$h_{ij}^{\alpha} = \frac{\Delta p_i^{\alpha} p_j^{\alpha} + \Delta p_j^{\alpha} p_i^{\alpha}}{2 \Delta p_i^{\alpha} \Delta p_i^{\alpha}} \quad ,$$

$$q_{ij}^{\alpha} = \frac{q_{ij} - p_i^{\alpha} p_j^{\alpha}}{\Delta p_i^{\alpha} \Delta p_j^{\alpha}} \quad ,$$

$$\alpha = l, \quad r.$$

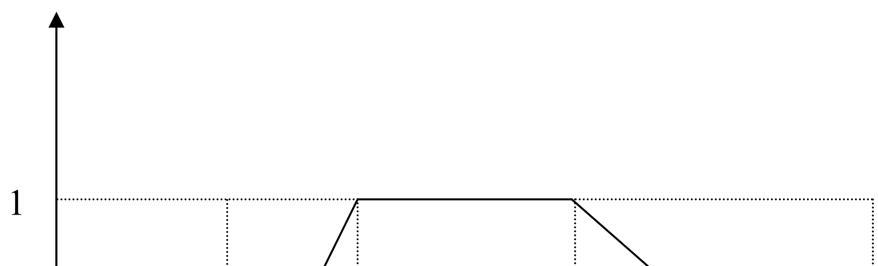


Рис. 6.3. График функции принадлежности нечеткого множества Q_i

График ФП $\mu_{Qi\,Qj}$ (q_{ij}) изображен на рис. 6.4 сплошной линией.

Несмотря на то, что принятое выше допущение (6.14) о виде ФП НМ Q_i позволяет получить выражения для ФП результирующего НМ Q_i Q_i в явном виде, формула (6.16) достаточно сложна для практических расчетов.

Поэтому введем операцию $\otimes$ *приближенного произведения нечетких множеств*

$$Q_i \otimes Q_j = (q_i^l q_j^l, p_i^l p_j^l, q_i^r q_j^r, p_i^r p_j^r), \qquad (2.96)$$

~ Функция принадлежности данного нечеткого множества изображена на рис. 6.4 пунктирной линией.

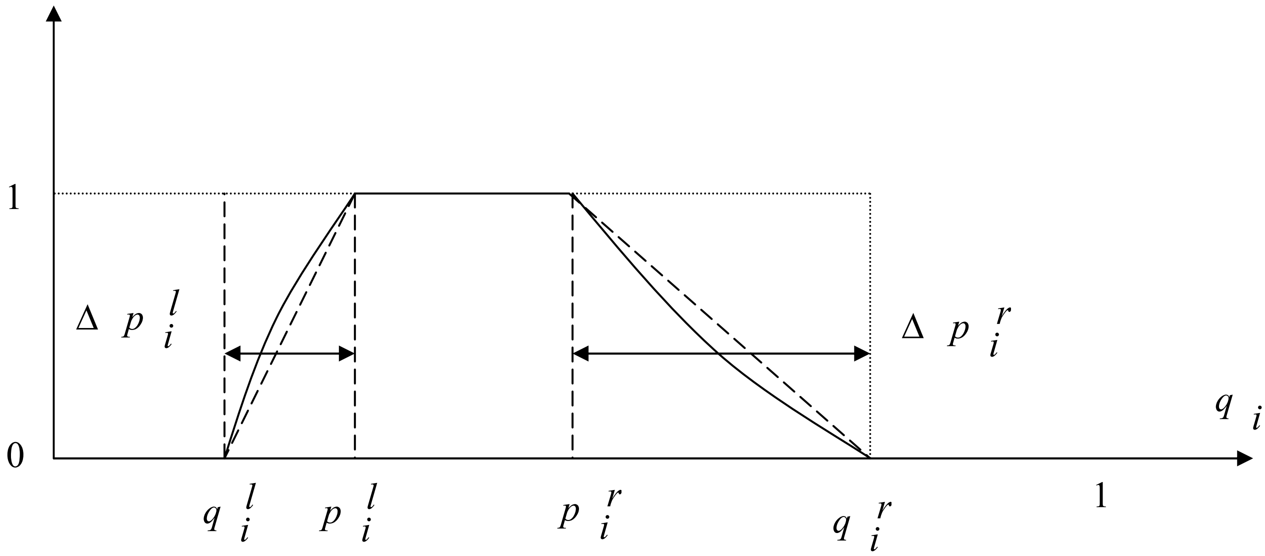


Рис. 6.4. Графики функций принадлежности

——— *НМ* $\underset{\sim}{Q}_i \underset{\sim}{Q}_j$;

------ *НМ* $\underset{\sim}{Q}_i \otimes \underset{\sim}{Q}_j$.

Так как приближенное произведение $\underset{\sim}{Q}_i \otimes \underset{\sim}{Q}_j$ *получено посредством линеаризации функции* $\mu_{\underset{\sim}{Q}_i \underset{\sim}{Q}_j}(q_i q_j)$, *желательно установить отношение порядка между точным произведением* $\underset{\sim}{Q}_i \otimes \underset{\sim}{Q}_j$, *т.е. ответить на вопрос занижается ли или завышается при этом итоговая оценка.*

С этой целью определим операции максимума и минимума для пары нечетких множеств:

$$\underset{\sim}{Q}_M = \max\{\underset{\sim}{Q}_i, \underset{\sim}{Q}_J\} = \{< p, \mu_{\underset{\sim}{Q}_M}(p) >\}, \tag{6.18}$$

где

$$\mu_{\underset{\sim}{Q}_M}(p) = \sup[\mu_{\underset{\sim}{Q}_i}(q_i) \wedge \mu_{\underset{\sim}{Q}_j}(q_j)]. \tag{6.19}$$

$$< q_i, q_j \mid p = \max < q_i, q_j >$$

$$\underset{\sim}{Q}_m = \min\{\underset{\sim}{Q}_i, \underset{\sim}{Q}_j\} = \{< p, \mu_{\underset{\sim}{Q}_m}(p) >\}, \tag{6.20}$$

где

$$\mu_{\underset{\sim}{Q}_m}(p) = \sup[\mu \underset{\sim}{Q}_i(q_i) \wedge \mu_{\underset{\sim}{Q}_j}(q_j)].$$

$$< q_i, q_j >\mid p = \min\{\underset{\sim}{Q}_i, \underset{\sim}{Q}_j\}.$$

Пусть $max\ \{ \underset{\sim}{Q}_i\ \underset{\sim}{Q}_j \} = \underset{\sim}{Q}_i$, либо $min\ \{ \underset{\sim}{Q}_i\ \underset{\sim}{Q}_j \} = \underset{\sim}{Q}_j$, тогда отношение порядка определяется следующим образом: $\underset{\sim}{Q}_i \underset{\sim}{\geq} \underset{\sim}{Q}_j$. Если $\underset{\sim}{Q}_i$ включает $\underset{\sim}{Q}_j$, то есть $\underset{\sim}{Q}_i \underset{\sim}{\geq} \underset{\sim}{Q}_j$, то $\underset{\sim}{Q}_i \underset{\sim}{\geq} \underset{\sim}{Q}_j$. В других случаях $\underset{\sim}{Q}_i$ и $\underset{\sim}{Q}_j$ считаются эквивалентными: $\underset{\sim}{Q}_i \underset{\sim}{\approx} \underset{\sim}{Q}_j$.

Примечание. Приведенное правило ранжирования нечетких множеств $\underset{\sim}{Q}_i$ и $\underset{\sim}{Q}_j$ введено в предположении о том, что рассматриваемые нечеткие множества являются нормальными и выпуклыми.

Нечеткое множество $\underset{\sim}{Q}_i$ является нормальным и выпуклым тогда и только тогда, когда существует такое $\underset{\sim}{q}_i^*$, что $max_{q_i}\ \{ \mu_{Qi}\ (q_i) \} = \mu_{Qi}\ (\underset{\sim}{q}_i^*) = 1$,

а $Q_{i\alpha}=\{ q_i \mid \mu_{Qi}\ (q_i) \geq \alpha \}$ есть выпуклое множество для любого α.

Тогда можно показать [10], что

$$\max\{\underset{\sim}{Q}_i, \underset{\sim}{Q}_j, \underset{\sim}{Q}_i \otimes \underset{\sim}{Q}_j\} = \underset{\sim}{Q}_i \otimes \underset{\sim}{Q}_j,$$

$$\text{т.е.} \qquad \underset{\sim}{Q}_i \otimes \underset{\sim}{Q}_j \underset{\sim}{>} \underset{\sim}{Q}_i \underset{\sim}{Q}_j\,. \qquad (6.21)$$

На основании нервенства (6.21) *можно сделать вывод о том*, *что приближенное произведение* $\underset{\sim}{Q}_i \otimes \underset{\sim}{Q}_j$ *есть верхняя оценка вероятности отказа*, *что и позволяет ее использовать при расчетах надежности системы.*

Принимая во внимание (2.86), *а также учитывая*, *что*

.

$$1-Q_i \ = (1-q_i^l;1-p_i^l;1-p_i^r;1-q_i^r);$$

$$1-Q_i \otimes Q_j \ = (1-q_i^l q_j^l;1-p_i^l p_j^l;1-p_i^r p_j^r;1-q_i^r q_j^r, \qquad (6.22)$$

(6.23)

можно рассчитать нечеткую оценку P^* для вероятности безотказной работы системы:

$$P^* = (1-Q_3)\otimes(1-Q_1Q_2)\otimes(1-Q_4\otimes Q_5). \qquad (6.24)$$

Так как на практике для ряда элементов сложных систем существуют значения их ВБР, определённые традиционными статистическими методами, то в выражение для ВБР системы наряду с ВБР элементов, представленными в виде нечетких множеств, войдут значения ВБР в виде обычных чисел. В этом случае можно трактовать обычное число как частный случай нечеткого множества с функцией принадлежности, равной единице и все операции выполнять по приведенным в данном пункте формулам.

6.3. Сравнение результатов нечеткого оценивания надежности с требованиями

Одним из этапов анализа надежности сложной системы является принятие решения о том, удовлетворяет или нет уровень ее надежности предъявляемым требованиям. Обычно решение данной задачи сводится к сравнению рассчитанного значения показателя надежности с некоторой величиной $P_{тр}$ из интервала [0,1]. В случае, если показатель надежности (например, ВБР) превышает либо равен $P_{тр}$, считают, что необходимый уровень надежности достигнут. Данная задача решается без особых затруднений.

Однако в случае нечеткого оценивания безотказности системы проверка удовлетворения требованиям становится нетривиальной и требует пояснений.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда и ВБР системы P и требования к ней $P_{тр}$ заданы нечетко. Тогда имеем

$$\underset{\sim}{P} = \{< p,\ \mu_{\underset{\sim}{P}}(p)>\}, \qquad (6.25)$$

$$\underset{\sim}{P}_{тр} = \{ p,\ \mu_{\underset{\sim}{P}тр}(p)\} \qquad (6.26)$$

Указанные нечеткие множества изображены на рис.2.6.

Для решения поставленной задачи преобразуем нечеткое множество $\underset{\sim}{P}_{тр}$, которое задает нижний предел для значений ВБР системы, в нечеткое множество $P_{доп}$, представляющее множество допустимых значений ВБР:

$$P_{доп} = \{< p,\ \mu_{\underset{\sim}{P}доп}(p)>\}, \qquad (6.27)$$

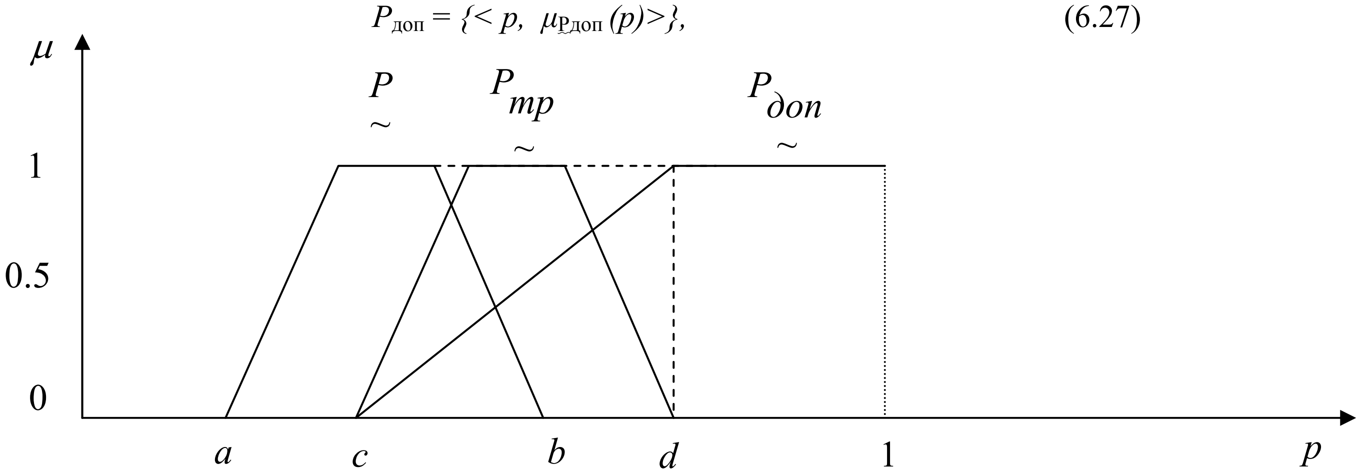


Рис. 6.5.Проверка выполнения требований к безотказности системы.

где

$$\bar{\mu}_{\underset{\sim}{P}_{mp}}(p)=\begin{cases}0, & p \le c\\ 1, & p \ge d\\ [1-\bar{\mu}_{\underset{\sim}{P}_{mp}}(p)]\,d\,p, & c<p<d,\end{cases} \qquad (6.28)$$

$$\bar{\mu}_{\underset{\sim}{P}_{mp}}(p)=\frac{\mu_{\underset{\sim}{P}_{mp}}(p)}{\int\limits_{c}^{d}\mu_{\underset{\sim}{P}_{mp}}(p)dp}, \qquad (6.29)$$

c и d есть нижняя и верхняя границы носителя нечеткого множества $\underset{\sim}{P}_{тр}$.

Носителем нечеткого множества $\underset{\sim}{P}_{тр}$ является обычное множество $S_{\underset{\sim}{P}тр}$, для которого справедливо

$$Q_{i\alpha}=\{\, p \mid \mu_{\underset{\sim}{P}тр}(p) \ge 0 \,\} \qquad (6.30)$$

Тогда можно сформулировать следующее правило.

Нечеткое множество $\underset{\sim}{P}$ *удовлетворяет ограничению* $\underset{\sim}{P}_{mp}$ *в случае, если значение функции совместимости* $\mu_{\underset{\sim}{P}_{доп}}^{\underset{\sim}{P}}$ *рассчитывается следующим образом*

$$\mu_{\underset{\sim}{P}_{доп}}^{\underset{\sim}{P}}=\frac{\int\limits_{0}^{1}\mu_{\underset{\sim}{P}\cap \underset{\sim}{P}_{доп}}(p)\;dp}{\int\limits_{0}^{1}\mu_{\underset{\sim}{P}}(p)\;dp}, \qquad (2.110)$$

Значение β обычно берется равным *0.5*. Можно ввести индекс совместимости ξ,

$$\xi = \begin{cases} 0, & \mu^{\tilde{p}}_{\tilde{p}_{доп}} < \beta, \\ 1, & \mu^{\tilde{p}}_{\tilde{p}} \geq \beta. \end{cases} \quad где \quad \mu_{\tilde{p} \cap \tilde{p}_{доп}}(p) = \min\{\mu_{\tilde{p}}(p), \mu_{\tilde{p}_{доп}}(p)\}. \qquad (6.32)$$

принимающий значения *0* либо *1*:

Расчет $\mu^{P}_{P_{доп}}$ по формуле (2.110) связан с интегрированием функций принадлежности НМ $\tilde{P}$ и НМ $\tilde{P}_{доп}$. Если ФП указанных множеств заданы в явном виде, удобном для интегрирования, то данная задача решается сравнительно легко. В противном случае можно применить следующий приближенный алгоритм:

а) Определяем a и b - минимальную и максимальную границы носителя S_p нечеткого множества

$$a = \inf_{p} S_p; \quad b = \sup_{p} S_p;$$

$$S_{\tilde{P}} = \{ p \mid \mu_P(p) \geq 0 \}.$$

б) Задаемся шагом дискретизации Δp нечеткого множества $\tilde{P}$ и формируем дискретный носитель $S^{д}_{\tilde{P}}$:

$$S^{д}_{\tilde{P}} = \{ a;\ a+\Delta p;\ \ldots;\ a+(k\text{-}1)\Delta p;\ \ldots;\ b \}$$

$$\Delta p = (b - a)/N,$$

где N - количество интервалов.

в) Определяем мощность множества $\tilde{P}$ по формуле:

$$N(\tilde{P}) = \sum_{k=1}^{N+1} \mu_{\tilde{P}}(p_k)$$

где

$$p_k = a + (k\text{-}1)\Delta p.$$

г) Определяем мощность множества $\tilde{P} \cap \tilde{P}_{доп}$ по формуле

$$N(\tilde{P} \cap \tilde{P}_{доп}) = \sum_{k=1}^{N+1} \min[\mu_{\tilde{P}}(p_k), \mu_{\tilde{P}_{доп}}(p_k)].$$

д) Определяем совместимость НМ $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_{доп}$:

- рассчитываем функцию совместимости $\mu^{P}_{\underset{\sim}{P}доп}$:

$$\mu^{P}_{\underset{\sim}{P}доп} = \frac{N(P \cap Pдоп)}{N(P)}$$

- сравнивая значение $\mu^{P}_{\underset{\sim}{P}доп}$ со значением уровня β, определяем индекс совместимости ξ:

$$\xi = \begin{cases} 0, & \mu^{\underset{\sim}{p}}_{\underset{\sim}{p}доп} < \beta, \\ 1, & \mu^{\underset{\sim}{p}}_{\underset{\sim}{p}доп} \geq \beta. \end{cases}$$

Данный метод позволяет использовать произвольные функции принадлежности.

6.4. Преобразование нечеткой оценки надежности к четкому виду

Пусть дана оценка ВБР системы в виде нечеткого множества $\underset{\sim}{P}$

$$\underset{\sim}{P} = \{< p,\ \mu_{\underset{\sim}{P}}(p) >\}.$$

Необходимо найти обычное множество *P*, которое наилучшим образом по некоторому заданному критерию описывало бы результаты нечеткого оценивания ВБР.

В работе [Корман А. Введение в теорию нечетких множеств, 1982] в качестве такого критерия предлагается минимум евклидова расстояния, которое определяется по формуле:

$$e(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]^2 \quad dx},$$

при этом обычное множество, евклидово расстояние от которого до множества $\underset{\sim}{B}$ минимально, называется ближайшим к $\underset{\sim}{B}$ и обозначается $\underset{\sim}{A}$.

В нашем случае задача сводится, таким образом, к нахождению обычного множества $\underline{P}$ минимально удаленного от НМ $\underset{\sim}{P}$ на евклидово расстояние, определенное как

$$e(\underset{\sim}{P}, \underline{P}) = \sqrt{\int_{0}^{1} \mu_{\underset{\sim}{P}}(p) - \mu_{\underline{P}}(x)]^2 \quad dp},$$

Задача нахождения четкого множества P решена (см. [9], стр. 38), и искомая ФП имеет вид:

$$\mu_{\underline{p}}(p)=\begin{cases}0, & \mu_{\underset{\sim}{p}}(p)\le 0{,}5,\\ 1, & \mu_{\underset{\sim}{p}}(p)>0{,}5.\end{cases} \tag{6.33}$$

Таким образом, $P \equiv \underline{P}$.

Левая граница множества $\underline{P}$ есть в данном случае формальный аналог нижней граничной оценки ВБР системы и может использоваться в дальнейших расчетах.

Рис.2.7 иллюстрирует особенности решения рассмотренной задачи.

$$1-\mu_{\underset{\sim}{p}}(p)$$

$$1-\mu_{\underset{\sim}{p}1}(p)$$

$$1-\mu_{\underset{\sim}{p}2}(p)$$

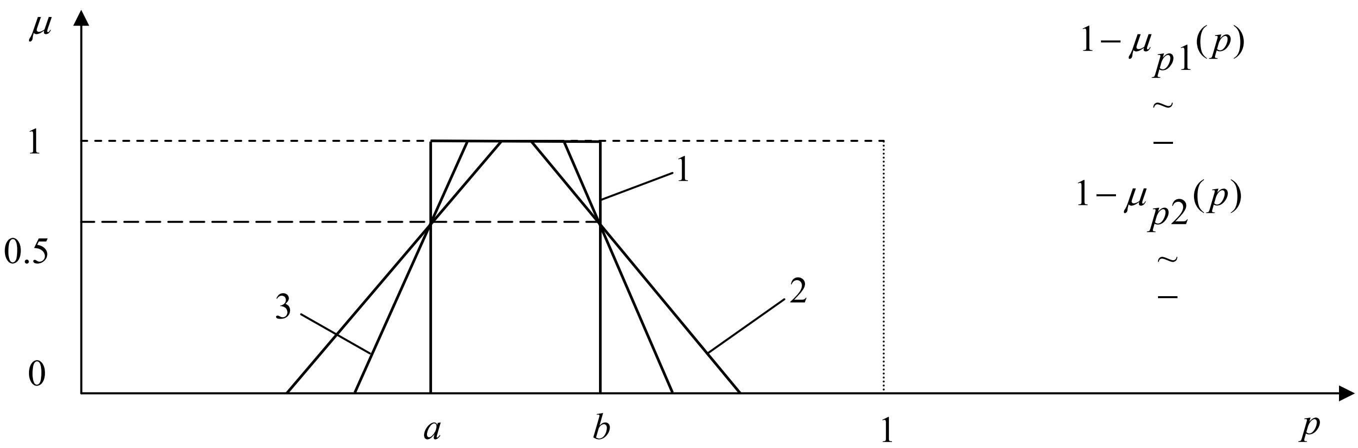


Рис. 6.6. Определение обычного множества, ближайшего к нечеткому.

В заключение необходимо отметить, что при использовании данного правила перехода к обычному множеству, одному и тому же четкому множеству $\underline{P}$ могут соответствовать различные исходные НМ. На рис.2.7 показана ситуация с двумя НМ $\underset{\sim}{P}_1$ и $\underset{\sim}{P}_2$.

Очевидно, что степень доверия к четкой оценке ВБР должна зависеть от формы исходного НМ, степени его нечеткости, близости ФП НМ $\underset{\sim}{P}$ к ФП множества $\underline{P}$. В качестве такой количественной характеристики степени доверия может использоваться квадратичный индекс нечеткости, определяемый посредством евклидова расстояния [9]:

$$\{P_н;\ \ P_в;\ \ \eta(\underset{\sim}{P})\},\qquad (6.35)$$

где

$$P_н = a = \inf_{p}\underset{\sim}{\underline{P}},\quad P_в = b = \sup_{p}\underset{\sim}{\underline{P}},$$

есть верхняя и нижняя границы множества $\underset{\sim}{\underline{P}}$.

Таким образом, итоговая оценка ВБР имеет вид:

$$\{P_н;\ \ P_в;\ \ \eta(\underset{\sim}{P})\},\qquad (6.36)$$

где

$$P_н = a = \inf_{p}\underset{\sim}{\underline{P}},\quad P_в = b = \sup_{p}\underset{\sim}{\underline{P}},$$

есть верхняя и нижняя границы множества $\underset{\sim}{\underline{P}}$.

Глава 7. Анализ критичности отказов элементов структурно-сложных систем

7.1. Определение критичности

Анализ отечественных и зарубежных публикаций по проблеме обеспечения надежности сложных систем свидетельствует о том, что в последние годы значительное внимание уделяется вопросам определения критичности отказов элементов сложных систем. Актуальность этой задачи обусловлена тем, что современные технические системы содержат, как правило, большое количество элементов. В этих условиях обеспечить повышение надежности системы путем улучшения качества одновременно всех элементов вряд ли возможно по причинам больших затрат. Однако ясно, что различные элементы в системе играют далеко не одинаковые роли, отказы разных элементов могут приводить к разным по степени влияния на состояние системы последствиям, элементы отличаются по уровню надежности и т.п. Возникает вопрос, нельзя ли в первую очередь сосредоточить усилия на совершенствовании элементов, играющих в обеспечении надежности системы наиболее важную роль. Такие элементы называют критичными.

Определение. Критичность элемента сложной системы есть свойство элемента, отражающее возможность возникновения и степень влияния отказа элемента на работоспособность системы. Критичность ЭСС должна определяться в рамках сложной системы, содержащей данный элемент.

С целью выяснения роли конкретных элементов (и их различных комбинаций) в обеспечении надежности всей системы в теории и практике надежности применяются специальные показатели. Наиболее широко распространены два из них: структурная важность и важность в смысле надежности. В простейших случаях они могут использоваться при анализе критичности элементов.

7.2. Структурная важность элементов

Для заданной монотонной структуры некоторые элементы являются более важными, чем другие, при определении того, работает система или нет. Например, если некоторый элемент соединен последовательно с остальной частью системы, то, видимо, этот элемент как минимум столь же важен, как и любой другой элемент системы. Ясно, что для инженера важно иметь количественную характеристику степени важности того или иного элемента системы.

Итак, насколько важен элемент i в определении того, работает система или нет? Прежде всего, предположим, что нам заданы состояния каждого из остальных элементов системы (i, X). Тогда если $y(1_i, X)= 1$, в то время как
$y(0_i, X)= 0$, то есть если

$$y(1_i, X) - y(0_i, X) = 1 \qquad (7.1)$$

то мы будем считать элемент i более важным, чем в случае если

$$y(1_i, X) = 1 = y(0_i, X) \quad \text{или} \quad y(1_i, X) = 0 = y(0_i, X).$$

Из (7.1) видно, что состояние i-го элемента определяет работоспособность системы в целом. Если же (7.1) не имеет места, то это означает, что отказ i-го элемента не приводит ни к каким последствиям в смысле работоспособности системы. Когда (7.1) выполняется, то говорят, что $<1_i, X>$ есть вектор критического пути для элемента i (в дальнейшем - просто критический путь). Введем обозначение
для полного числа критических путей для элемента i.

В результате можно предложить следующую вполне естественную меру структурной

$$h_y(i) = \sum_{\{x \mid x_i = 1\}} [y_1(1,X) - y_1(0,X)] \qquad (7.2)$$

важности i -го элемента:

$$I_y(i) = \frac{1}{2^{N-1}} h_y(i) \qquad (7.3)$$

Здесь в знаменателе стоит 2^{x-1} для соответствующей нормировки - это полное число состояний всего остального подмножества элементов системы, когда состояние *i*-го элемента зафиксировано.

Подобный же анализ структурной важности может быть проведен в терминах векторов сечений. Заметим, что (7.1) одновременно приводит к тому, что $<1_i, X>$ есть вектор пути и $<0_i, X>$ есть вектор сечения. Можно также назвать $<0_i, X>$ критическим сечением для элемента.

7.3. Важность элементов в смысле надежности

В предыдущем подразделе было введено понятие меры структурной важности каждого из элементов монотонной структуры. Эта мера основывается лишь на знании структуры системы. Теперь введем понятие меры важности элементов в смысле надежности, которая учитывает не только собственно структуру системы, но и характеристики надежности отдельных элементов. Такая мера может быть полезной при анализе систем с точки зрения рационального распределения ресурсов при повышении надежности отдельных элементов.

Интуитивно ясно, что важность элемента можно измерять с помощью оценивания чувствительности показателя надежности системы к изменению значений показателя надежности данного элемента. Более строгое определение приводится ниже.

$$I_h(i) = \frac{\partial h(r)}{\partial r_1}. \qquad (7.4)$$

Определение. Важность *i*-го элемента в смысле надежности $I_h(i)$ определяется как

Из (2.6) следует, что

$$\frac{\partial h(r)}{\partial r_1} = h(1_1, r) - h(0_1, r).$$

Тогда может быть записано следующее эквивалентное определение

$$I_h(i) = h(1_1, r) - h(0_1, r). \qquad (7.5)$$

Важность элементов в смысле надежности может быть использована для оценки влияния повышения надежности элементов на надежность системы следующим образом. По известному правилу дифференцирования

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial h}{\partial r_1} \frac{\partial r_i}{\partial t},$$

где t - общий параметр (например, время), используя (7.4), получаем

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N} I_h(i) \frac{\partial r_i}{\partial t}. \tag{7.6}$$

Таким образом, скорость роста надежности системы есть взвешенная сумма скоростей роста надежности элементов, где веса представляют собой количественные значения важности элементов в смысле надежности.

Из (7.6) можно также получить

$$\Delta h \cong \sum_{i=1}^{N} I_h(i) \Delta r_i,$$

где Δh - приращение надежности системы, соответствующее приращениям надежности ее элементов.

Задача определения степени влияния изменения надежности элементов на надежность системы может быть решена и в случае нечеткого описания вероятностей отказов элементов.

Введем обозначения:

$$\underset{\sim}{Q}_{\sim E} = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{Q}_1, \ldots\ldots, \underset{\sim}{Q}_{i-1}, \underset{\sim}{Q}_i, \underset{\sim}{Q}_{i+1}, \ldots, \underset{\sim}{Q}_n), \tag{7.7}$$

$$\underset{\sim}{Q}^{-}_{\sim E} = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{Q}_1, \ldots\ldots, \underset{\sim}{Q}_{i-1}, \underset{\sim}{Q}_i, \underset{\sim}{Q}_{i+1}, \ldots, \underset{\sim}{Q}_n), \tag{7.8}$$

где $\underset{\sim}{Q}_E$ - есть нечеткое значение вероятности отказа системы при фактических значениях вероятности отказа элементов, а $\underset{\sim}{Q}_{Ei}$ - нечеткое значение вероятности отказа системы при абсолютной надежности i-го элемента.

Можно показать, что

$$\underset{\sim}{Q}_{Ei} \underset{\sim}{\leq} \underset{\sim}{Q}_E \tag{7.9}$$

Для того, чтобы сравнить степень влияния надежности элементов на надежность системы, введем показатель V , отражающий количественные различия между $\tilde{Q}_{\bar{E}}$ и $\tilde{Q}_{\bar{E}i}$. Применительно к трапециидальной форме функции принадлежности (6.14) имеем:

$$V(\tilde{Q}_{\tilde{E}}, \tilde{Q}_{\tilde{E}i}) = (q^l_{\bar{E}} - q^l_{\bar{E}i}) + (p^l_{\bar{E}} - q^l_{\bar{E}i}) + (q^r_{\bar{E}} - q^r_{\bar{E}i}) + (q^r_{\bar{E}} - q^r_{\bar{E}i}) > 0. \qquad (7.10)$$

Тогда, используя этот показатель, можно проранжировать все элементы по степени влияния на вероятность отказа системы, то есть, например, если

$$V(\tilde{Q}_{\tilde{E}}, \tilde{Q}_{\tilde{E}i}) > V(\tilde{Q}_{\tilde{E}}, \tilde{Q}_{\tilde{E}j}),$$

то исключение возможности отказа i-го элемента более эффективно с точки зрения повышения общей надежности.

Пример. Для пояснения изложенного рассмотрим числовой пример применительно к дереву отказов, изображенному на рис.6.2. Нечеткие вероятности отказа элементов системы представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Нечеткие вероятности отказа элементов системы

$\tilde{Q}_i$	q^l_i	p^l_i	p^l_i	q^r_i
$\tilde{Q}_1$	0,1;	0,15;	0,2;	0,25;
$\tilde{Q}_2$	0,02;	0,03;	0,05;	0,08;
$\tilde{Q}_3$	0,01;	0,02;	0,03;	0,04;
$\tilde{Q}_4$	0,2;	0,25;	0,35;	0,5;
$\tilde{Q}_5$	0,006;	0,008;	0,01;	0,012.

$$\tilde{Q}_{\bar{\tilde{E}}} = 1 - \tilde{P}^* = (1 - \tilde{Q}_3) \otimes (1 - \tilde{Q}_1 \otimes \tilde{Q}_2) \otimes (1 - \tilde{Q}_4 \otimes \tilde{Q}_5).$$

Используя операцию приближенного произведения $\otimes$, и с учетом (7.6), (7.7) имеем

С помощью этого выражения получаем следующую нечеткую вероятность отказа системы

$$\tilde{Q}_{\bar{\tilde{E}}} = (0{,}013; 0{,}026; 0{,}043; 0{,}065),$$

График функции принадлежности нечеткого множества $Q_{\bar{E}}$ показан на рис. 3.1.

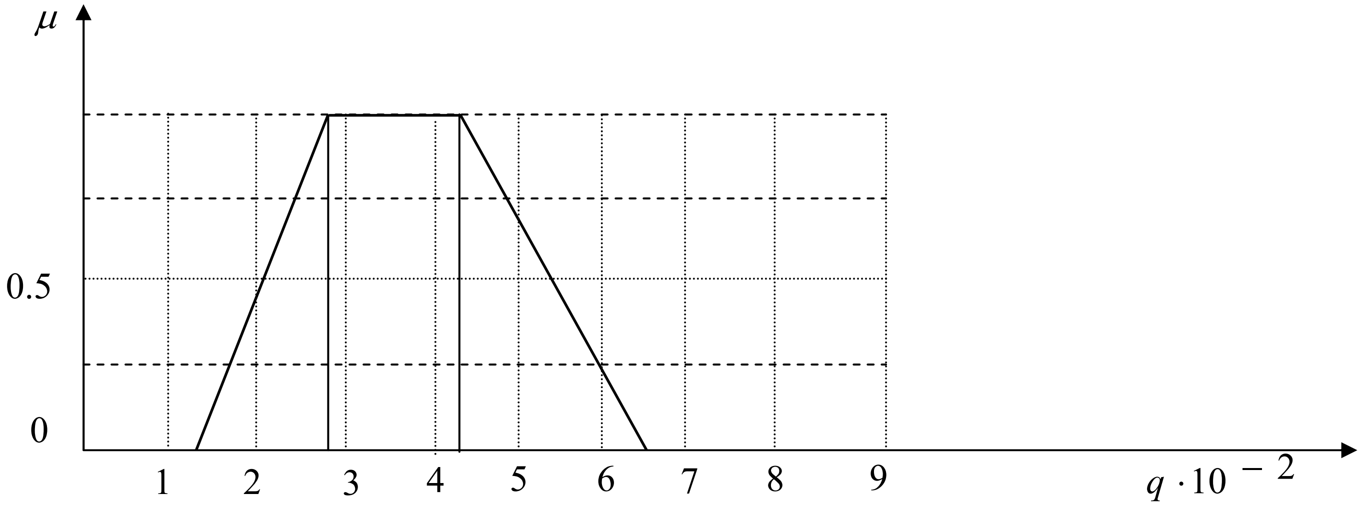


Рис. 7.1 График функции принадлежности НМ $Q_{\bar{E}}$

В таблице 7.2 приведены значения $Q_{\bar{E}}$ и $V(Q_{\bar{E}}\ ,\ Q_{\bar{E}i})$, соответствующие исключению вероятности отказа *i*-го элемента системы.

Анализ значений $V(Q_{\bar{E}}\ ,\ Q_{\bar{E}i})$показывает, что в первую очередь необходимо обратить внимание на повышение надежности третьего элемента.

Таблица 7.2.

Номер элемента	$Q_{\bar{E}i} = (q^{l}_{\bar{E}i}\ ,\ p^{l}_{\bar{E}i}\ ,\ q^{r}_{\bar{E}i}\ ,\ p^{r}_{\bar{E}i}\ )$	$V(Q_{\bar{E}}\ ,\ Q_{\bar{E}i})$
1	(0.0112; 0,022; 0,035; 0,044)	0,026
2	(0,0112; 0,022; 0,0035; 0,046)	0,036
3	(0,0032; 0,0065; 0,045; 0,026)	0,099
4	(0,012; 0,024; 0.04; 0.059)	0,012
5	(0,012; 0,024; 0.04; 0.059)	0,012

Литература

1.Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных производственных систем. М. Энергоатомиздат, 1986.
2.Ушаков И.А. Вероятностные модели надежности информационно-вычислительных систем. М. Радио и связь, 1991.
3.Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем. Санкт-Петербург, Политехника, 2001.
4.Афанасьев В.Г., Зеленцов В.А., Миронов А.И. Методы анализа надежности и критичности отказов сложных систем. Министерство обороны, 1992.
5.Райншке К., Ушаков И.А. Оценка надежности систем с использованием графов, М. Радио и связь, 1998.
6.Рябинин И.А., черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М. Радио и связь, 1986.
7.Барлоу Р., Прошан А. Математическая теория надежности. Пер. с англ. Под ред Гнеденко Б.В., М. Сов. Радио, 1969.
8. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Пер. с англ..- М., Мир,1976.
9. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств Пер. с франц. М. Радио и связь, 1982.