

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ
«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ».

ЧАСТИНА 2 «ДОСЛІДЖЕННЯ АСР» ЗА ОСВІТНІМ РІВНЕМ
«БАКАЛАВР» ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ
«151 АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

Затверджено на засіданні кафедри
комп'ютерно-інтегрованих
технологій та автоматизації
Протокол № 2 від 22.11.2018

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорія автоматичного керування». Частина 2 «Дослідження АСР» за освітнім рівнем «Бакалавр» для студентів спеціальності «151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Укл. Швачка О.І. – Д.: ДВНЗ УДХТУ, 2019. – 32 с.

Укладач О.І. Швачка, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск О.П. Мисов, канд. техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорія автоматичного керування». Частина 2 «Дослідження АСР» за освітнім рівнем «Бакалавр» для студентів спеціальності «151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Укладач ШВАЧКА Олександр Іванович

Технічний редактор В.П. Синицька
Комп'ютерна верстка В.П. Синицька

Підписано до друку 13.05.19. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов. друк. арк. 1,45. Обл.-вид. арк. 1,49. Тираж 100 прим. Зам. № 222.
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 5, 49005

Редакційно-видавничий відділ

ЗМІСТ

ТЕМА 1. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ АСР.....	4
ТЕМА 2. ПОБУДОВА МЕЖІ ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ (D-РОЗБИТТЯ).....	12
ТЕМА 3. АНАЛІЗ ЯКОСТІ ПРОЦЕСУ РЕГУЛЮВАННЯ	17
ТЕМА 4. РОЗРАХУНОК ОПТИМАЛЬНИХ НАСТРОЙОК РЕГУЛЯТОРА	25
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	31

ТЕМА 1. ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ АСР

Стійкість – це основна якісна властивість системи автоматичного регулювання, без якої вона непрацездатна. Фізично стійкість означає, що процеси в системі прагнуть до певної величини при будь-яких початкових умовах. У разі лінійних АСР стійкість визначається тільки її структурою і параметрами і не залежить від зовнішніх впливів. Основним режимом роботи системи є рівноважний (статичний) режим, при якому змінні стану з плином часу не змінюються, а всі похідні координат стану дорівнюють нулю.

Корені характеристичного рівняння АСР можна представити на комплексній площині у вигляді точок (рис. 1.1).

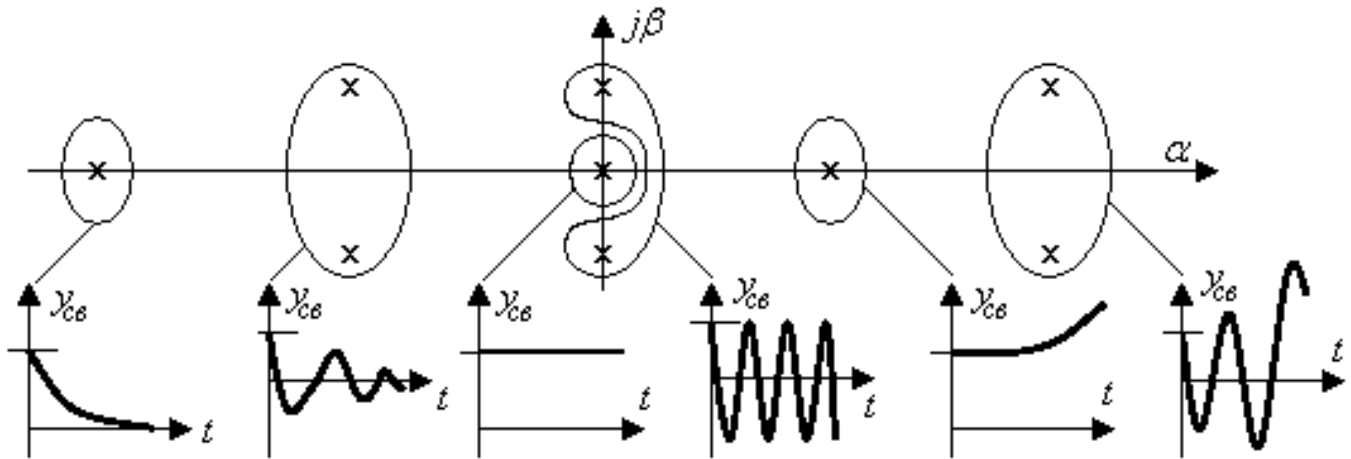


Рисунок 1.1 – Вплив коренів характеристичного рівняння на стійкість АСР

Математична (головна) ознака стійкості: для стійкості лінійної системи необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння мали від'ємну дійсну частину. Іншими словами – щоб всі полюса системи були лівими. Коріння полінома чисельника передаточної функції (нулі) на стійкість системи не впливають.

Якщо хоча б один корінь знаходиться в правій півплощині площини коренів, то система буде нестійка. Уявна вісь являє собою межу стійкості системи, тобто при наявності хоча б одного кореня на цій осі система знаходиться на межі стійкості (за умови, що всі інші корені мають негативну реальну частину).

Необхідною (але не достатньою) умовою стійкості є позитивність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Приклад. Оцінимо стійкість системи з передаточною функцією:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k}{Tp+1}.$$

Її характеристичне рівняння, $Tr + 1 = 0$, має тільки один корінь, який буде негативним при $T > 0$. Отже, позитивність коефіцієнтів характеристичного рівняння для системи 1-го порядку є необхідною і достатньою умовою стійкості.

Алгебраїчні критерії стійкості використовують зв'язок між становищем на комплексній площині коренів характеристичного (алгебраїчного) рівняння і значеннями його коефіцієнтів.

Частотні критерії стійкості використовують зв'язок між стійкістю системи і формою її частотних характеристик.

Алгебраїчний критерій Гурвіца.

Це критерій, який передбачає розгляд характеристичного рівняння:

$$D(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_2 p + a_1 = 0.$$

З його коефіцієнтів складається матриця Гурвіца: на головній діагоналі зверху вниз виписуються по порядку коефіцієнти характеристичного рівняння від a_n до a_1 включно. У кожному стовпці вниз від діагоналі записують коефіцієнти при зростаючих ступенях оператора p , вгору – при спадаючих ступенях p . Відсутні елементи в стовпці доповнюються нулями.

$$H = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Формулювання критерію Гурвіца: для стійкості лінійної системи необхідно і достатньо, щоб всі n визначників, одержуваних з матриці Гурвіца були позитивні:

$$\Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\Delta_1 = a_n > 0;$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ 1 & a_{n-1} \end{bmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-3} \\ 0 & a_n & a_{n-2} \end{bmatrix} > 0;$$

$$\dots$$

$$\Delta_n = \det H = a_1 \Delta_{n-1} > 0.$$

Приклад. Оцінити за критерієм Гурвіца стійкість системи з ПФ:

$$W(s) = \frac{s-2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}.$$

Записуємо характеристичне рівняння:

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0,$$

а) перевіряємо необхідну умову – всі коефіцієнти характеристичного рівняння позитивні, що можна коротко записати: умова $a_i > 0$ виконується;

б) перевіряємо достатню умову, склавши визначник Гурвіца:

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 & 2 & 4 & 0 \\ \Delta_2 & 1 & 3 & 0 \\ \Delta_3 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0,$$

$$\Delta_2 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 6 - 4 = 2 > 0$$

$$\Delta_3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 24 + 0 + 0 - 0 - 0 - 16 = 8$$

Усі мінори матриці позитивні, система стійка.

Частотний критерій стійкості Михайлова: для стійкості системи n -ого порядку необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова обійшов в позитивному напрямку (проти годинникової стрілки) послідовно n квадрантів, ніде не перетворюючись в нуль.

На рис. 1.1,а показана крива Михайлова нестійкої системи, у якій порушена послідовність обходу квадрантів комплексної площини.

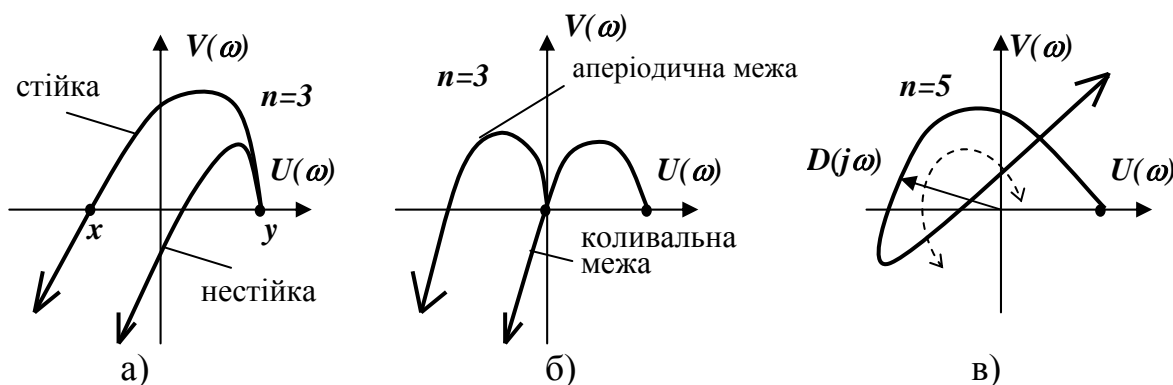


Рисунок 1.1 – Варіанти оцінка стійкості за критерієм Михайлова

Система знаходиться на аперіодичній межі стійкості (рис. 1.1,б), якщо крива при $\omega = 0$ починається на початку координат, і на періодичній межі стійкості, якщо крива при $\omega \neq 0$ проходить через початок координат. На рис. 1.1,в надана крива нестійкої системи, так як порушена послідовність обходу квадрантів комплексної площини. Зауважимо, що позначення осей $U(\omega)$ і $V(\omega)$ зазвичай використовуються при побудові частотних характеристик на комплексній площині не по всій передаточній функції, а лише по її знаменнику.

Приклад. Оцінити за критерієм Михайлова стійкість системи з ПФ:

$$W(s) = \frac{s - 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

Записуємо характеристичне рівняння замкнутої системи:

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0.$$

Виконуємо заміну $s = j\omega$, знижуємо порядок j і групуємо:

$$D(j\omega) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3j\omega + 4 = 4 - 2\omega^2 + j\omega(3 - \omega^2),$$

де $(4 - 2\omega^2)$ – це дійсна функція $U(\omega)$;

$\omega(3 - \omega^2)$ – це уявна функція $V(\omega)$.

Таблиця 1.1 – Розрахунок годографа Михайлова

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	4	0
∞	$-\infty$	$-\infty$
$\sqrt{2}=1,41$	0	1,41
$\sqrt{3}=1,73$	-2	0

Прирівнюючи по черзі парну і непарну функції нулю, знаходимо частоти 1,41 і 1,73, що відповідають перетину кривої з осями координат, підставляємо ці частоти в характеристичну функцію і заповнюємо таблицю. Будуємо графік – починаючись на дійсній позитивній на півосі при $\omega = 0$, він проходить послідовно проти годинникової стрілки $n = 3$ квадрантів комплексної площини, йдучи в нескінченність при $\omega = \infty$.

Система стійка (рис. 1.2,а). Вона буде знаходитися на аперіодичній межі стійкості при $a_n = 0$ і на періодичній межі стійкості при $a_n = 2 + 4 = 6$.

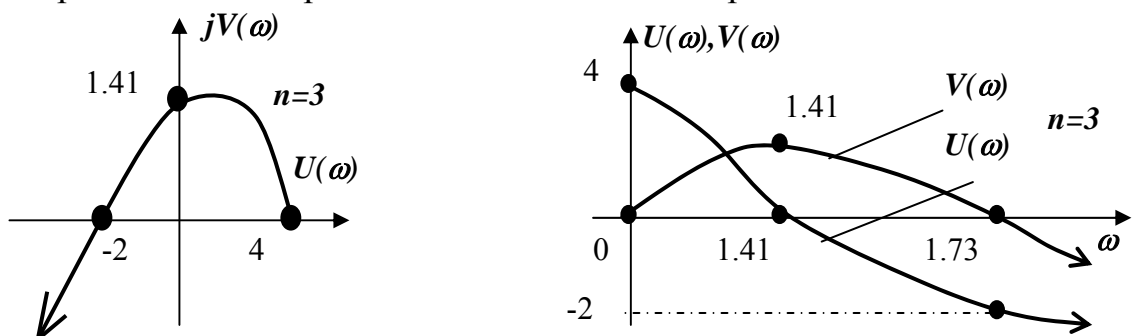


Рисунок 1.2 – Розрахунок годографа Михайлова

Існує ще одне формулювання критерію Михайлова, що засноване на аналізі графіків парної і непарної функцій. Вона носить назву слідства або другої форми критерію Михайлова: система стійка, якщо $U(\omega)$ і $V(\omega)$ функції при зміні частоти ω від нуля до плюс нескінченності обертається в нуль по черзі, починаючи з уявної функції, коріння перемежуються (рис. 1.2,б).

Частотний критерій стійкості Найквіста: система, стійка в розімкнутому стані або нейтральна, буде стійкою в замкненому стані, якщо її АФЧХ при зміні частоти ω від нуля до плюс нескінченності не охоплює точку з координатами $(-1, j0)$.

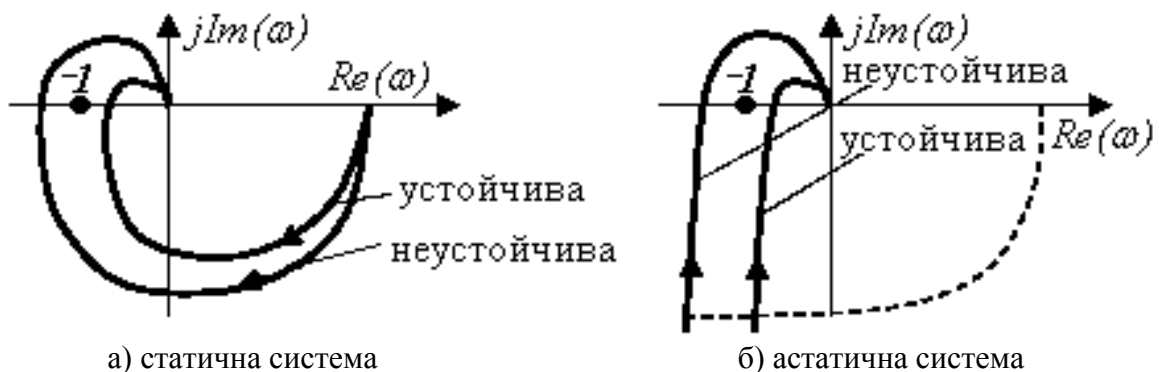


Рисунок 1.3 – Варіанти оцінка стійкості за критерієм Найквіста

Приклад. Визначити стійкість замкнутої системи, використовуючи критерій стійкості Найквіста.

Передаточна функція розімкнутої системи має вигляд:

$$W(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + T_y \cdot p) \cdot (1 + T_m \cdot p)},$$

де $K = 100 \text{ c}^{-1}$ – загальний коефіцієнт підсилення розімкнутої системи;

$T_m = 0,1 \text{ c}$ – постійна часу двигуна;

$T_y = 0,02 \text{ c}$ – постійна часу підсилювача.

Передаточну функцію розімкнутої системи при заміні $p = j\omega$ можна записати у вигляді:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \text{ або}$$

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}.$$

Використовуючи 2-й спосіб наведення, отримаємо

$$A(\omega) = |W(j \cdot \omega)| = \left| \frac{K}{j \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot T_m) \cdot (1 + j \cdot \omega \cdot T_y)} \right| = \frac{K}{\omega \cdot \sqrt{1 + (\omega \cdot T_m)^2} \cdot \sqrt{1 + (\omega \cdot T_y)^2}} =$$

$$= \frac{100}{\omega \cdot \sqrt{1 + (\omega \cdot 0.1)^2} \cdot \sqrt{1 + (\omega \cdot 0.02)^2}}$$

$$\psi(\omega) = \arg W(j\omega) = -90^\circ + \psi_1 + \psi_2,$$

де $\psi_1 = -\arctg(\omega \cdot T_m) = -\arctg(0.1 \cdot \omega)$;

$\psi_2 = -\arctg(\omega \cdot T_y) = -\arctg(0.02 \cdot \omega)$

Обчислимо $A(\omega)$, $\psi_1(\omega)$, $\psi_2(\omega)$, $\psi(\omega)$ для ряду значень ω .

Результати обчислень зведемо в табл. 1.2

Таблиця 1.2 – Розрахунок годографа Найквіста

ω, c^{-1}	0	5	10	15	25	30	100
$A(\omega)$	∞	18	6.9	3.56	1.32	0.28	0.045
$\psi_1(\omega)$	0	-26	-45	-56	-68	-79	-84
$\psi_2(\omega)$	0	-6	-11	-17	-26	-45	-64
$\psi(\omega)$	-90	-122	-144	-153	-184	-214	-238

За даними таблиці побудуємо АФХ розімкнутої системи. Знаменник передаточної функції розімкнутої системи має один нульовий корінь. Тому гілку АФХ, що відповідає частотам $\omega \rightarrow 0$, доповнимо дугою окружності нескінченно великого радіуса так, щоб вектор $W(j\omega)$ повернувся за годинниковою стрілкою на кут, рівний 90° .

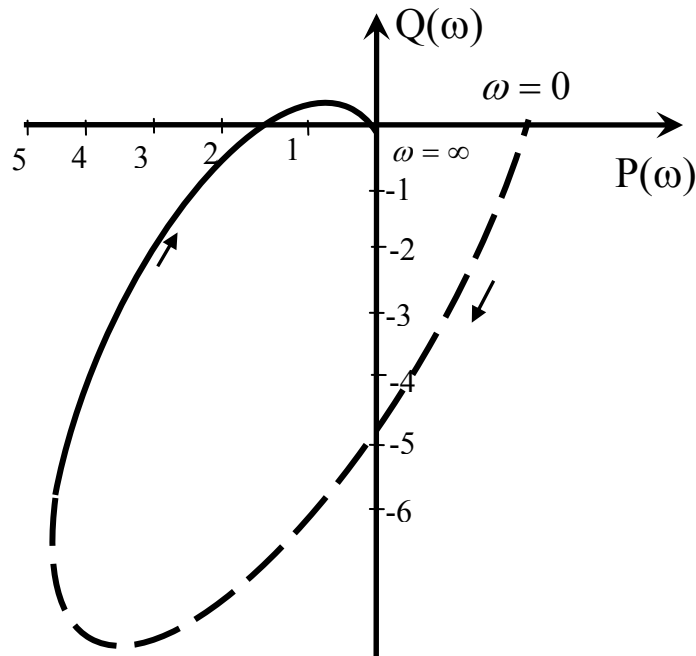


Рисунок 1.5 – Побудова годографа Михайлова

За рис. 1.5 видно, що АФХ розімкнутої системи охоплює точку $(-1, j0)$. Отже, замкнута система не стійка.

Логарифмічний критерій стійкості – це частотний критерій, що дозволяє судити про стійкість замкнутої АСР з вигляду логарифмічної характеристики розімкнутої системи. Цей критерій заснований на однозначному зв'язку ЛФЧХ і АФЧХ систем автоматичного регулювання.

Як впливає з критерію стійкості Найквіста в стійких АСР фазовий зсув може досягати значення тільки при модулях комплексної передаточної функції, меншому ніж одиниця. Це дозволяє легко визначити стійкість за видом ЛАЧХ і ЛФЧХ (рис. 1.6).

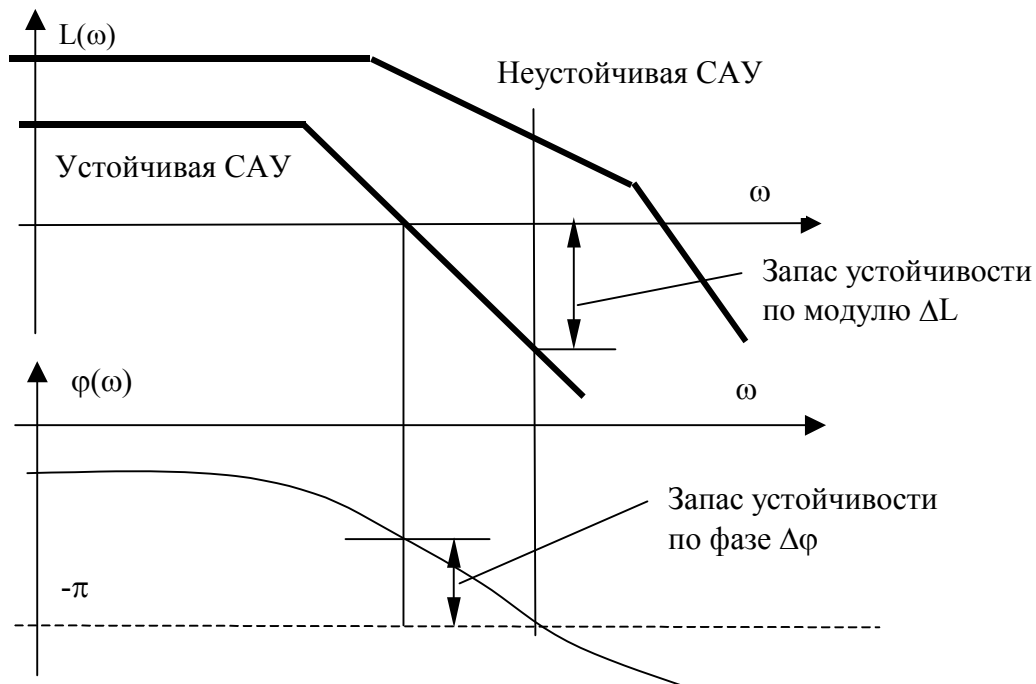


Рисунок 1.5 – Варіанти оцінки стійкості за логарифмічним критерієм

Система стійка, якщо при досягненні ФЧХ значення $-\pi$ ЛАЧХ буде негативною.

Якщо ФЧХ перетинає рівень $(-\pi)$ кілька разів, то для визначення стійкості використовують правило переходів: система стійка, якщо різниця між позитивними і негативними переходами ФЧХ лінії $(-\pi)$ в інтервалі частот від 0 до $\omega_{\text{ср}}$ дорівнює нулю (ФЧХ повинна перетинати рівень $(-\pi)$ в інтервалі частот від 0 до $\omega_{\text{ср}}$ парне число разів).

Якщо розімкнений ланцюг нестійкий і має l правих коренів, то використовують наступне формулювання логарифмічного критерію Найквіста: система стійка, якщо різниця між позитивними і негативними переходами ФЧХ лінії $(-\pi)$ в інтервалі частот від 0 до $\omega_{\text{ср}}$ дорівнює $l/2$.

Приклад. Оцінити стійкість за логарифмічним критерієм стійкості.

Визначити стійкість і запас стійкості АСР за модулем і за фазою, якщо передаточна функція розімкненої системи має вигляд:

$$W(p) = \frac{K}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)},$$

$$K = 50 \text{ c}^{-1}; \quad T_1 = 0,04 \text{ c}; \quad T_2 = 0,01 \text{ c}.$$

Находимо частоти сполучення:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,04} = 25, \text{ c}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,01} = 100, \text{ c}^{-1}.$$

Будуємо низькочастотну асимптоту ЛАЧХ. Система астатична:

$$L(\omega)_H = 20 \cdot \lg K - 20 \cdot \lg \omega, \quad \text{при } \omega = 1: L(\omega)_H = 20 \cdot \lg 50 = 34, \text{ Дб}.$$

Через точку 0 (рис 1.6) проводимо пряму з нахилом -20 Дб/дек .

Будуємо середньочастотну й високочастотну складові ЛАЧХ. Змінюємо в точці ω_1 нахил низькочастотної складової на -20 Дб/дек , а в точці ω_2 ще на -20 Дб/дек . Отримуємо ЛАЧХ розімкнутої системи (рис. 1.6).

Будуємо фазову характеристику САУ (рис. 1.6):

$$\psi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(T_1 \cdot \omega) - \text{arctg}(T_2 \cdot \omega);$$

$$\psi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(0.04 \cdot \omega) - \text{arctg}(0.01 \cdot \omega).$$

Таблиця 1.3 – Розрахунок ЛФЧХ

$\omega, \text{с}^{-1}$	0.1	1	30	60	100	1000	∞
$\varphi(\omega), \text{град}$	-90	-93	-118	-180	-211	-263	-270

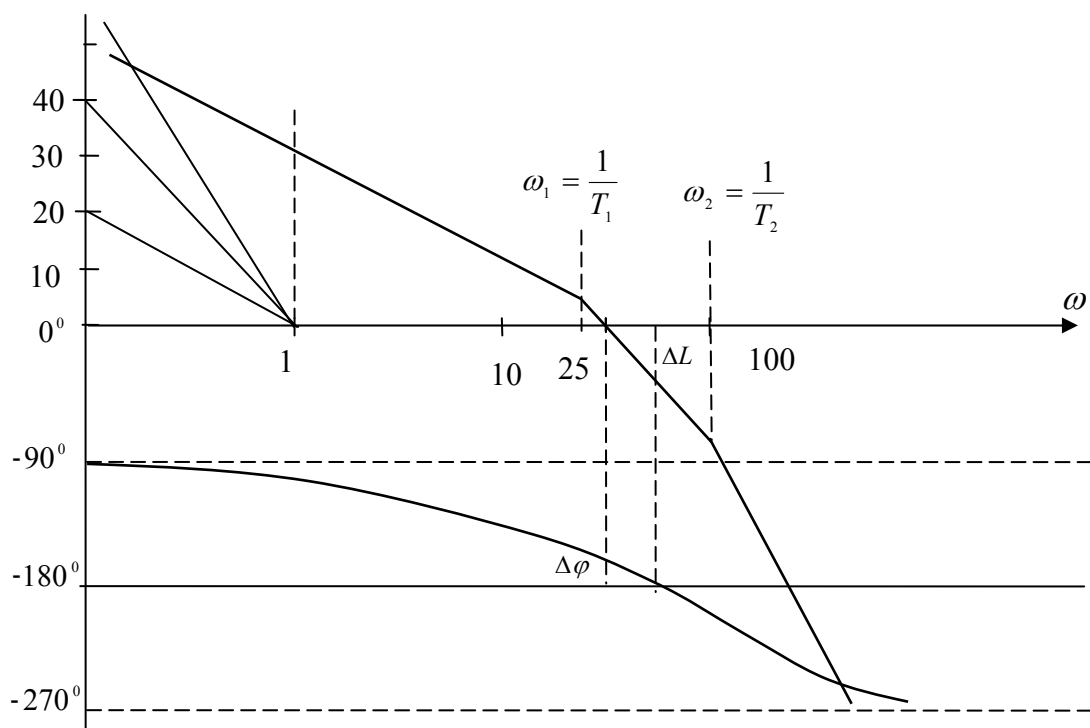


Рисунок 1.6 – Оцінка стійкості за логарифмічними характеристиками

Згідно з отриманими даними (рис. 1.6), система є стійкою. Також показано оцінку запасу стійкості за амплітудою та фазою.

ТЕМА 2. ПОБУДОВА МЕЖІ ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ (D-РОЗБИТТЯ)

Критерії стійкості при заданих значеннях параметрів системи дозволяють встановити факт стійкості або нестійкості системі. У багатьох випадках бажано вказати всі можливі значення змінних параметрів при яких АСР стійка.

Область в просторі параметрів системи, в кожній точці якої характеристичний поліном не має правих коренів, називається областю стійкості. Крім областей стійкості можуть існувати і області з іншим розподілом коренів.

D-розбиття за одним параметром.

Якщо досліджуваний параметр d лінійно входить в характеристичне рівняння:

$$A(p) = P(p) + dQ(p) = 0,$$

де $P(p)$ і $Q(p)$ поліноми від p , які не залежать від d , то межа D-розбиття визначається:

$$d(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = x(\omega) + jY(\omega); \quad -\infty < \omega < +\infty.$$

Оскільки функція $x(\omega) = \operatorname{Re} \left[-\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \right]$ є парна функція ω , то при

побудові межі D-розбиття досить побудувати її для $0 < \omega < +\infty$, а потім доповнити дзеркальним відображенням побудованої ділянки щодо дійсної осі (рис. 2.1). Побудова кривої D-розбиття не вирішує питання про виділення областей стійкості, оскільки крива D-розбиття, в загальному випадку являє собою сукупність точок, в яких характеристичне рівняння має, по принаймні, хоча б один чисто уявний корінь.

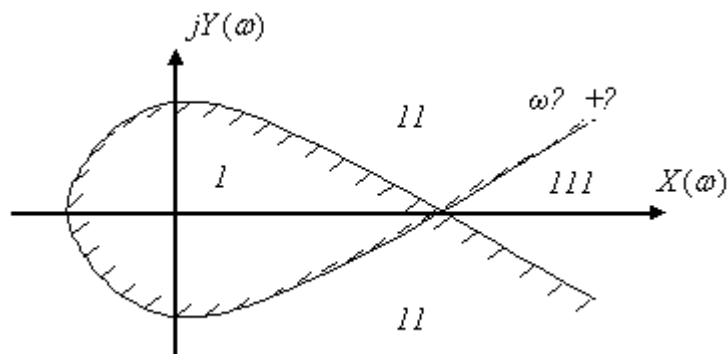


Рисунок 2.1 – Крива D-розбиття

Для виділення області стійкості слід заштрихувати криву за таким правилом: при русі по уявної осі комплексної площини коренів від $-\infty$ до $+\infty$ область коренів стійкої АСР залишається зліва, тому, зазначивши напрям руху в площині параметра $d(j\omega)$ на кривій D-розбиття від $-\infty$ до $+\infty$, слід заштрихувати ліву сторону кривої відносно до цього руху.

Частина площини, в бік якої спрямовані штрихи, є відображенням лівої напівплощини комплексної площини коренів. Так як досліджуваний параметр d

за фізичним змістом є речовинна величина, то розглядаються лише ті відрізки дійсної осі, які лежать в області оточеної внутрішньої штрихуванням. Для кожної області знаходять розподіл коренів. Для цього вважають $d=0$ і знаходять коріння рівняння.

Отриманий розподіл коренів вважають заданим і наносять на площину $d(j\omega)$ на початку координат.

Якщо під час руху в площині $d(j\omega)$ від однієї точки до іншої відбувається перехід через криву D-розбиття з заштрихованої області в незастраховану, то в площині коренів один корінь переходить в праву півплощину. Якщо штрихування подвійне (наприклад, в точці перетину кривих), то уявну вісь перетинають два кореня.

Приклад. Побудувати область D-розбиття в плоскості коефіцієнта підсилення.

Передаточна функція розімкнутої АСР має вигляд:

$$W_p(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$$

Передаточна функція замкнутої системи:

$$W_s(p) = \frac{K}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + K}$$

Рівняння межі D-розбиття може бути отримане з характеристичного рівняння замкнутої системи:

$$(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)(jT_3\omega + 1) + K = 0;$$

$$-jT_1 T_2 T_3 \omega^3 - (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)\omega^2 + j(T_1 + T_2 + T_3)\omega + K + 1 = 0.$$

Отже:

$$-K = j[(T_1 + T_2 + T_3) - jT_1 T_2 T_3 \omega^2] \omega + [1 - (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)\omega^2]$$

де $Y(\omega) = [(T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3 \omega^2] \omega$;
 $X(\omega) = 1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)$.

Визначимо точки перетину з висями:

а) $X(\omega) = 0$; $\omega^2(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3) - 1 = 0$; $\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}$;

$$Y(\omega)_{X(\omega)=0} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{\sqrt{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}} - \frac{T_1 T_2 T_3}{\sqrt{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)^3}};$$

б) $Y(\omega) = 0$; $\omega = 0$; при $\omega > 0$; $\omega^2 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}$;

$$X(\omega)_{Y(\omega)=0} = 1 - \frac{(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) T_1 T_2 T_3}{T_1 T_2 T_3}$$

Результуюча крива D-розбиття, за результатом розрахунку, наведена на рис. 2.1.

D-розбиття площині двох параметрів.

У ряді випадків необхідно з'ясувати вплив на стійкість двох параметрів τ і K , що лінійно входять в характеристичне рівняння. Характеристичне рівняння в цьому випадку можна надати в наступному вигляді:

$$TP(p) + KQ(p) + R(p) = 0,$$

де $P(p)$, $Q(p)$ і $R(p)$ – поліноми від p ;

τ і K – варійовані параметри.

Межа D -розбиття в площині параметрів τ і K визначається за формулою:

$$\tau P(j\omega) + KQ(j\omega) + R(j\omega) = 0.$$

Позначимо:

$$\begin{cases} P(j\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega); \\ Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega); \\ R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau P_1(\omega) + KQ_1(\omega) = -R_1(\omega); \\ \tau P_2(\omega) + KQ_2(\omega) = -R_2(\omega). \end{cases}$$

Вирішуючи систему за правилом Крамера, отримаємо:

$$\tau = \frac{\Delta\tau}{\Delta}; K = \frac{\Delta K}{\Delta};$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}, \Delta\tau = \begin{vmatrix} -P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix}, \Delta K = \begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що варійовані параметри τ і K є парними функціями ω , оскільки визначники Δ , $\Delta\tau$, ΔK – непарні функції частоти, бо $\text{Re}P(j\omega) = P_1(\omega)$, $\text{Re}Q(j\omega) = Q_1(\omega)$, $\text{Re}R(j\omega) = R_1(\omega)$ – є парні функції ω , а $\text{Im}P(j\omega) = P_2(\omega)$, $\text{Im}Q(j\omega) = Q_2(\omega)$, $\text{Im}R(j\omega) = R_2(\omega)$ – непарні функції ω .

Якщо при фіксованому значенні ω :

– $\Delta \neq 0$, $\Delta\tau \neq 0$ ($\Delta K \neq 0$), то система має єдине рішення;

– $\Delta = 0$, $\Delta\tau = 0$ ($\Delta K = 0$), то рішення системи невизначено;

– $\Delta = 0$, $\Delta\tau \neq 0$ ($\Delta K \neq 0$), то система не має рішень.

Таким чином, при $\Delta \neq 0$ для кожного значення ω за отриманим рівнянням можна визначити значення змінних параметрів τ і K , тобто в площині параметрів τ і K побудувати межу D -розбиття.

Слід мати на увазі, що при прийнятій формі записи рівнянь слід по осі абсцис відкладати значення τ , по осі ординат – значення K .

При побудові межі D -розбиття в площині двох параметрів необхідно мати на увазі наступне:

а) якщо при деякому значенні частоти $\Delta = 0$, а $\Delta\tau \neq 0$ і $\Delta K \neq 0$, то точка межі D -розбиття в площині змінних параметрів йде в нескінченність;

б) якщо при деякому значенні частоти $\Delta = 0$, а $\Delta\tau = 0$ і $\Delta K = 0$, то рівняння стають еквівалентними. В цьому випадку в площині змінних параметрів отримують не точку, а пряму:

$$\tau = -\frac{KQ_1(\omega) + R_1(\omega)}{P_1(\omega)} = -\frac{KQ_2(\omega) + R_2(\omega)}{P_2(\omega)}.$$

Ці прямі називаються особливими прямими, а точки, що належать їм – винятковими точками.

Практично в більшості завдань особливі прямі відповідають значенням $\omega = 0$ і $\omega = \infty$, тобто для побудови особливих прямих слід прирівняти коефіцієнт при старшому члені a_0 і вільний член a_n до нуля. При цьому отримують рівняння особливих прямих при $\omega = 0$ і $\omega = \infty$ відповідно.

Якщо a_0 і a_n не залежать від змінних параметрів, то особливі прямі йдуть в нескінченності і не викреслюються;

в) якщо $\Delta = 0$, $\Delta\tau \neq 0$ ($\Delta K \neq 0$), то кривої D-розбиття не існує, але особливі прямі можуть бути.

Правил штрихування.

При прийнятій формі записи (τ – по осі абсцис, K – по осі ординат) межа D-розбиття штрих зліва при обході від $\omega \rightarrow -\infty$ до $\omega \rightarrow +\infty$, якщо $\Delta > 0$ і справа, якщо $\Delta < 0$. При русі вздовж кривої знак Δ змінюється тільки при перетині D-кривої з особливими прямими. Оскільки варійовані параметри τ і K – парні функції ω , то D-крива штрихподвійна з одного боку. Особливі прямі $\omega = 0$ і $\omega = \infty$ штрихують одинарним штрихуванням таким чином, щоб поблизу точок сполучення особливих прямих і кривої D-розбиття заштриховані і незаштриховані з боку прямих і D-кривій були спрямовані один до одного.

Особлива пряма $\omega = \omega_1 \neq 0$, $\Delta\tau = 0$ ($\Delta K = 0$), штрихподвійним штрихуванням, якщо Δ проходячи через нуль змінить знак. Якщо при $\omega = \omega_1 = 0$, $\Delta\tau = 0$ ($\Delta K = 0$), а Δ не змінює знака проходячи через нуль, то особлива пряма не розглядається.

Приклад. Побудувати межу D-розбиття в площині параметрів X та Y , якщо відоме характеристичне рівняння:

$$p^3 + Xp^2 + Yp + 1 = 0.$$

Перепишемо рівняння в загальному вигляді:

$$D(p) = KP(p) + \tau Q(p) + R(p) = 0,$$

В результаті заміни p на $j\omega$, отримаємо:

$$\begin{cases} KP_1(\omega) + \tau Q_1(\omega) = -R_1(\omega); \\ KP_2(\omega) + \tau Q_2(\omega) = -R_2(\omega). \end{cases}$$

У випадку, що розглядається, після заміни:

$$\begin{aligned}
 & -j\omega^3 - X\omega^2 + jY\omega + 1 = 0 \\
 & P_1(\omega) = -\omega^2; \quad Q_1(\omega) = 0; \quad R_1(\omega) = 1; \\
 & P_2(\omega) = 0; \quad Q_2(\omega) = \omega; \quad R_2(\omega) = -\omega^3. \\
 & \begin{cases} -X\omega^2 + Y \cdot 0 = -1; \\ X \cdot 0 + Y \cdot \omega = \omega^3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Вирішуючи систему за правилом Крамера, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{Q_1(\omega)R_2(\omega) - Q_2(\omega)R_1(\omega)}{P_1(\omega)Q_2(\omega) - P_2(\omega)Q_1(\omega)} = \frac{0 \cdot (-\omega^3) - \omega \cdot 1}{(-\omega^2) \cdot \omega - 0 \cdot 0} = \frac{1}{\omega^2}; \\
 Y &= \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{P_2(\omega)R_1(\omega) - P_1(\omega)R_2(\omega)}{P_1(\omega)Q_2(\omega) - P_2(\omega)Q_1(\omega)} = \frac{0 \cdot 1 - (-\omega^2) \cdot (-\omega^3)}{(-\omega^2) \cdot \omega - 0 \cdot 0} = \omega^2.
 \end{aligned}$$

Задаючи значення $-\infty < \omega < +\infty$, будуємо криву D-розбиття.

Таблиця 2.1 – Залежність $X(\omega)$ та $Y(\omega)$ побудови межі D-розбиття

ω	0	0.5	1	2	3	∞
X	∞	4	1	0.25	1/9	0
Y	0	0,25	1	4	9	∞

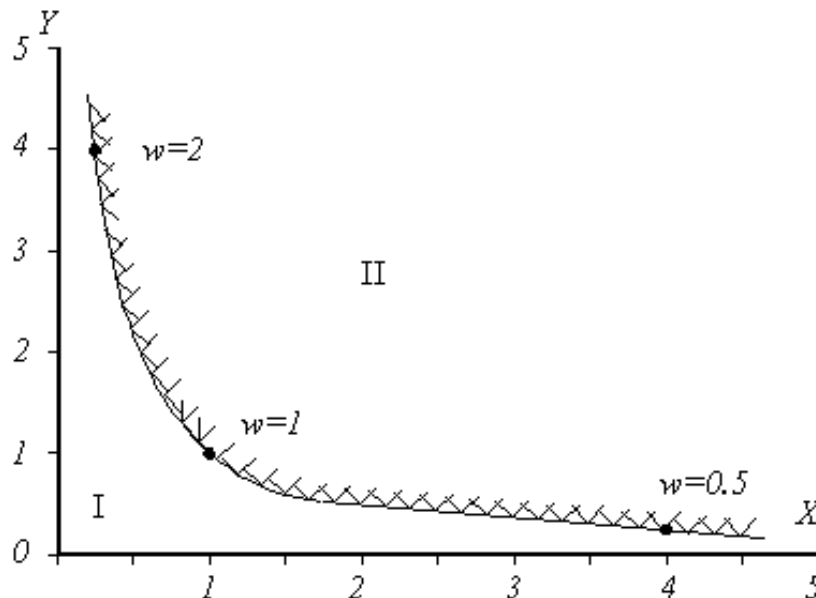


Рисунок 2.2 – Межа D-розбиття в області параметрів $Y(X)$

Оскільки головний визначник при $\omega > 0$:

$$\Delta = P_1(\omega)Q_2(\omega) - P_2(\omega)Q_1(\omega) = (-\omega^2) \cdot \omega - 0 \cdot 0 = -\omega^3 < 0,$$

то при русі по кривій штрихується двічі права сторона.

ТЕМА 3. АНАЛІЗ ЯКОСТІ ПРОЦЕСУ РЕГУЛЮВАННЯ

Якщо досліджувана АСР стійка, то може виникнути питання про те, наскільки якісно відбувається регулювання в цій системі і чи задовольняє воно технологічним вимогам. На практиці якість регулювання можна визначити візуально за графіком перехідної кривої, однак, є точні методи, що дають конкретні числові значення.

Показники якості розбиті на 4 групи:

- 1) прямі – визначаються безпосередньо за кривою перехідного процесу;
- 2) кореневі – визначаються за коренем характеристичного полінома;
- 3) частотні – за частотними характеристиками;
- 4) інтегральні – отримані шляхом інтегрування функцій.

Прямі показники якості.

До них відносяться: ступінь загасання, перерегулювання, статична помилка, час регулювання та ін.

Припустимо, перехідна крива, знята на об'єкті, має коливальний характер (рис. 3.1).

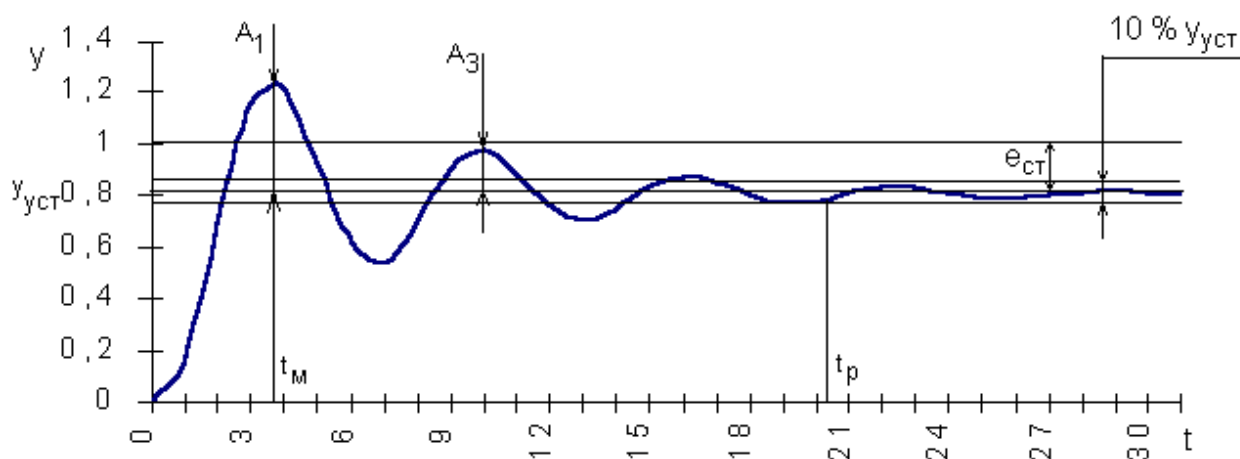


Рисунок 3.1 – Перехідна характеристика при збуренні за завданням

Статична помилка визначається відхиленням поточного значення параметру ($y_{уст}$) від заданого ($y_{зад}$) в кінці перехідного процесу:

$$e_{ст} = y_{уст} - y_{зад}.$$

Ступінь загасання ψ визначається за формулою:

$$\Psi = 1 - \frac{A_3}{A_1},$$

де A_1 і A_3 – відповідно 1-а і 3-я амплітуди перехідної кривої.

Перерегулювання:

$$\sigma = \frac{A_1}{y_{уст}} = \frac{y_{max} - y_{уст}}{y_{уст}},$$

де y_{max} – максимум перехідної кривої.

Час досягнення першого максимуму t_m визначається за графіком.

Час регулювання t_p визначається наступним чином: Знаходиться допустиме відхилення $\Delta = 5\% y_{уст}$ і будується площина 2Δ . Час t_p відповідає останній точці перетину $y(t)$ з даною межею. Тобто час, коли коливання регульованої величини перестають перевищувати 5% від сталого значення.

Кореневі показники якості.

До них відносяться: ступінь коливання, ступінь стійкості та ін.

Не вимагають побудови перехідних кривих, оскільки визначаються за коренем характеристичного полінома. Для цього корені полінома відкладаються на комплексній площині і за ними визначаються:

– ступінь стійкості η визначається як межа, правіше якої коренів немає:

$$\eta = \min |\operatorname{Re}(s_i)|,$$

де $\operatorname{Re}(s_i)$ – дійсна частина кореня s_i .

Приклад визначення ступеня стійкості показано на рис. 3.2. Лінії побудови показні пунктиром. Ступінь стійкості визначається за самим правим коренем (корені s_3 та s_4).

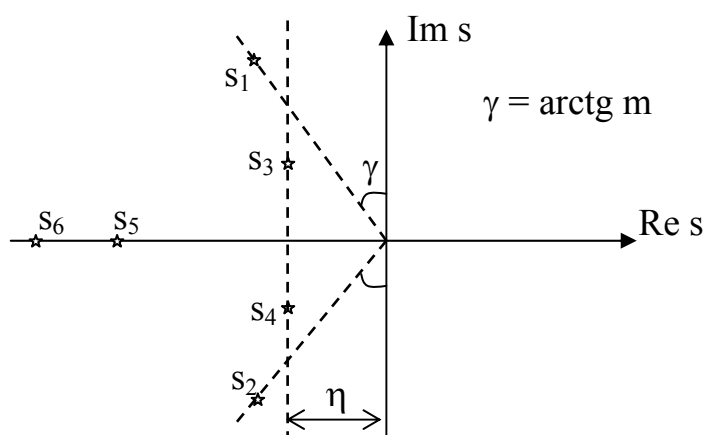


Рисунок 3.2 – Визначення ступеня стійкості як кореневого показника якості

– ступінь коливання m розраховується через кут γ :

$$m = \operatorname{tg} \gamma.$$

Для визначення γ проводяться два променя, які обмежують всі корені на комплексній площині. γ – кут між цими променями та уявною віссю. Ступінь коливання може бути визначений також за формулою:

$$m = \min \left| \frac{\operatorname{Re}(s_i)}{\operatorname{Im}(s_i)} \right|.$$

Якщо у системі нема комплексних коренів, тобто усі коріння лежать на дійсній вісі, то коливання у системі відсутні та $m = 90^\circ$. При наявності чисто уявних коренів система знаходиться на межі стійкості, для неї $m = 0$.

Ступінь стійкості та ступінь коливання для працездатної системи повинні бути максимальними. Значення $m = 0$ та $\eta = 0$ відповідають межі стійкості.

Приклад. Нехай передаточна функція розімкнутої системи має вигляд:

$$W_\infty(s) = \frac{5}{3,5s^3 + 2s^2 + 4s + 1}.$$

Для визначення коренів характеристичного полінома прирівнюємо його до нуля і розв'язуємо одержане рівняння. Корені:

$$s_1 = -0,27; s_2 = -0,15 + j * 1,02; s_3 = -0,15 - j * 1,02.$$

Ступінь коливання визначається як мінімум:

$$m = \min \left| \frac{\operatorname{Re}(s_i)}{\operatorname{Im}(s_i)} \right| = \frac{0,15}{1,02} = 0,1471,$$

Ступінь стійкості:

$$\eta = \min |\operatorname{Re}(s_i)| = 0,15.$$

Частотні показники якості.

Для визначення частотних показників якості потрібна побудова АФХ розімкнутої системи і АЧХ замкнутої системи.

За АФХ визначаються запаси: ΔA – за амплітудою, $\Delta \varphi$ – за фазою (рис. 3.3).

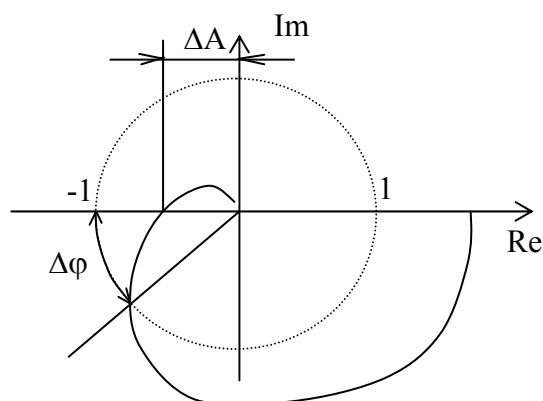


Рисунок 3.3 – Визначення частотних показників якості

Запас ΔA визначається по точці перетину АФХ з негативною дійсною піввіссю. Для визначення $\Delta\phi$ будується коло одиничного радіуса з центром в початку координат. Запас $\Delta\phi$ визначається по точці перетину з цим колом.

За АЧХ замкнутої системи визначаються показники коливання за завданням M і помилкою M_E як максимуми відповідно АЧХ за завданням і АЧХ за помилкою (рис. 3.4).

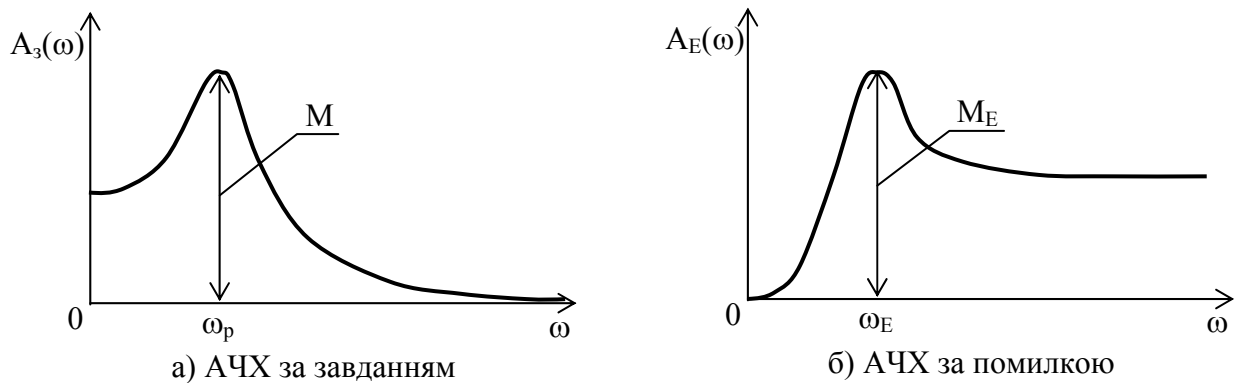


Рисунок 3.4 – Визначення показника коливання для оцінки якості

Для побудови АЧХ за завданням необхідно визначити передаточну функцію замкнутої системи за завданням $\Phi_3(s)$, зробити підстановку $s = j\omega$ та побудувати за нею АЧХ (рис. 3.4,а). Побудова АЧХ за помилкою аналогічна, але відповідно береться передаточна функція за помилкою $\Phi_E(s)$ (рис. 3.4,б).

Значення максимумів АЧХ відповідають різні резонансні частоти:

ω_p – для АЧХ за завданням;

ω_E – для АЧХ за помилкою.

До показників коливання, а також до запасу за амплітудою ставлять вимоги мінімальності. Запас за фазою, навпаки, повинен бути максимально великим.

Інтегральні показники якості.

Вони визначаються ляхом інтегрування (підсумовування) окремих функцій (перехідних процесів або других показників якості). Різновидом інтегральних показників є інтегральний квадратичний критерій I_0 .

Якщо порівнювати два перехідних процеси (рис. 3.5), то візуально можна визначити, що перший процес має більше високу якість.

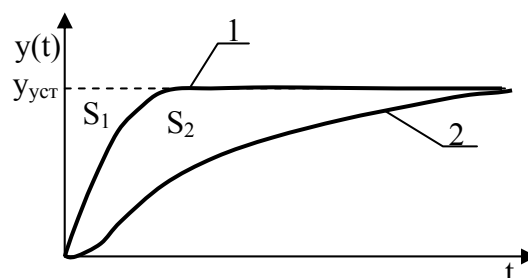


Рисунок 3.5 – Визначення інтегральних показників якості

Кількісно це можна виразити площиною між відповідною кривою та прямою $y = y_{уст}$. Для першої кривої ця площа (S_1) менше, чім для другої (S_2), тому перехідний процес кращий. Ця площа визначається як інтеграл:

$$S = \int_0^{\infty} (y_{уст} - y(t)) dt$$

та може бути використана як інтегральний показник якості.

Частіше використовується інтегральна квадратична оцінка. Це обумовлено тим, що перехідна характеристика на певних інтервалах часу може приймати від'ємні значення, відповідно, відніматись з інтегральної величини, що призводить до неправильного значенню площини.

Розглянемо методи побудови перехідної характеристики.

Аналітичні методи засновані на вирішенні диференціального рівняння системи:

$$D(p) x(t) = M(p) f(t).$$

Рішенням лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами буде вираз виду:

$$x(t) = x_n(t) + x_в(t),$$

де $x_n(t)$ – спільне рішення однорідного диференціального рівняння $D(p) x(t) = 0$, має вигляд:

$$x_n(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t},$$

причому c_1, \dots, c_n – довільні постійні, які визначаються з початкових умов процесу, а p_1, \dots, p_n – корені характеристичного рівняння $D(p) = 0$.

Приватне або вимушене рішення $x_в(t)$ визначається правою частиною вихідного рівняння і воно відповідає деякому сталому режиму в системі, який буде існувати після загасання $x_n(t)$.

Таким чином, в загальному випадку ми маємо справу із завданням рішення неоднорідного диференціального рівняння. Таким чином, доводиться мати справу з двома трудомісткими операціями: обчисленням коренів і відшукування постійних інтегрування. Якщо перша операція може бути виконана наближеними методами, то друга є вельми трудомісткою. Завдання дещо полегшується, якщо для вирішення використовувати операційний метод і перетворення Лапласа.

Використовуючи поняття передаточної функції і перетворення Лапласа, визначимо $h(t)$:

$$Y(S) = X(S) * W(S) - \text{зображення вихідної величини за Лапласом.}$$

Так як $x(t) = 1(t)$, то $X(S) = L[x(t)] = L[1(t)] = 1/S$, тоді:

$$h(t) = y(t) = L^{-1}[Y(S)] = L^{-1}[W(S) * 1/S] = L^{-1}[W(S)/S],$$

де $L[x(t)]$ і $L^{-1}[Y(S)]$ – відповідно, пряме і зворотне перетворення Лапласа, тобто перехід від функції часу $x(t)$ до зображення цієї функції за Лапласом ($X(S)$) і навпаки від $Y(S)$ до $y(t)$.

Приклад. Розрахувати перехідну характеристику за передаточною функцією:

$$W(p) = \frac{2}{p^2 + 5 \cdot p + 4} .$$

Перехідна характеристика розрахована за формулою:

$$h(t) = L^{-1} \cdot \left[\frac{1}{p} \cdot W(p) \right] = L^{-1} \cdot \left[\frac{2}{p \cdot (p^2 + 5 \cdot p + 4)} \right] .$$

Для знаходження перехідної характеристики, для даного випадку, можна розкласти передаточну функцію $W(p)$ на суму простих дробів за формулою:

$$W(p) = \frac{K1}{p - p1} + \frac{K2}{p - p2} + \frac{K3}{p} .$$

Для розкладання знайдені:

– корені рівняння: $p \cdot (p^2 + 5 \cdot p + 4) = 0 : p1 = -1, p2 = -4, p3 = 0 ;$

– коефіцієнти $K1, K2, K3$:

$$K1 = \left[(p+1) \cdot \frac{2}{p \cdot (p+1) \cdot (p+4)} \right]_{p=-1} = \frac{2}{(-1) \cdot (-1+4)} = -\frac{2}{3}$$

$$K2 = \left[(p+4) \cdot \frac{2}{p \cdot (p+1) \cdot (p+4)} \right]_{p=-4} = \frac{2}{(-4) \cdot (-4+1)} = -\frac{1}{6}$$

$$K3 = \left[p \cdot \frac{2}{p \cdot (p+1) \cdot (p+4)} \right]_{p=0} = \frac{1}{2}$$

Підстановкою знайдених $p1, p2, K1, K2, K3$ в рівняння передаточної функції у вигляді суми простих дробів знайдено:

$$W(p) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{p+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} .$$

Для знаходження зворотного перетворення Лапласа функції можна скористатися виразом:

$$L^{-1} \cdot \left[b \cdot \frac{1}{p+a} \right] = b \cdot e^{-at} ,$$

де b, a – деякі константи.

Застосуванням вказаного виразу до отриманої передаточної функції знайдена перехідна характеристика:

$$h(t) = -\frac{2}{3} \cdot e^{-t} + \frac{1}{6} \cdot e^{-4t} + \frac{1}{2}$$

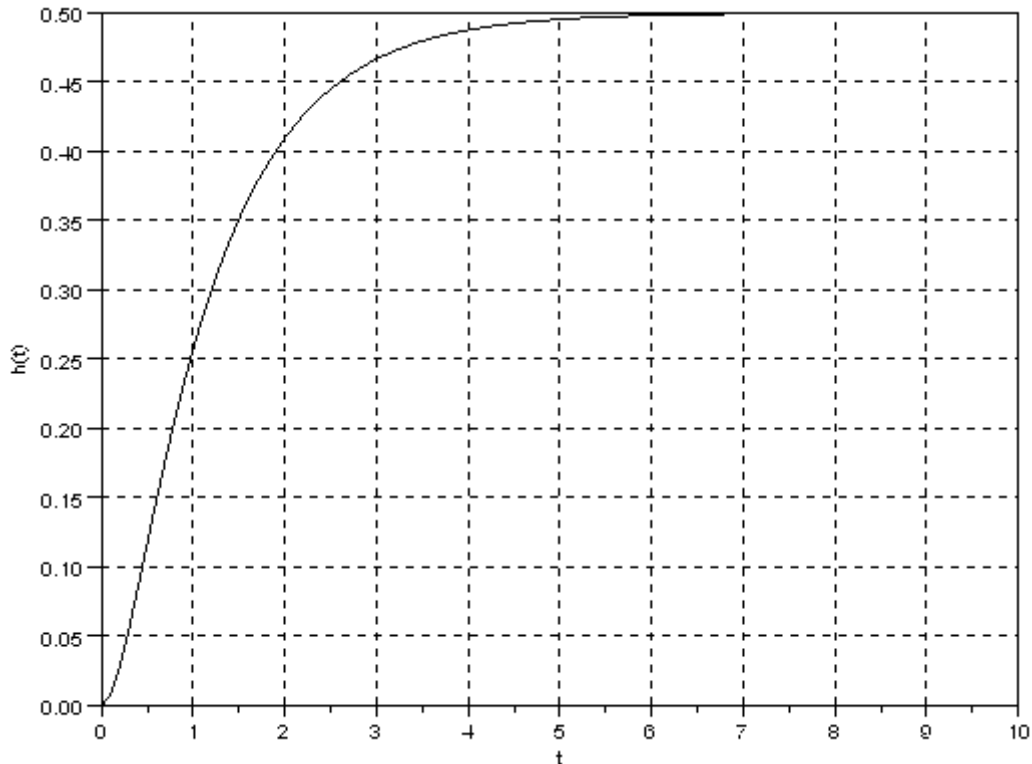


Рисунок 3.3 – Перехідна характеристика за формулою зворотного перетворення Лапласа

Графічні методи засновані на застосуванні частотних і перехідних характеристик. Розглянемо метод наближеного побудови кривої перехідного процесу в автоматичній системі за заданою речовою частотною характеристикою замкнутої системи.

Перехідний процес при одиничному зовнішньому впливі для нульових початкових умов можна отримати, визначивши інтеграл:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t dt .$$

Обчислити цей інтеграл в загальному випадку надзвичайно складно, тому зазвичай використовують наближений метод, заснований на апроксимації дійсної частотної характеристики $P(\omega)$ декількома лінійними ділянками. Потім речову частотну характеристику надають у вигляді суми типових трапецій. Для кожної з трапецій за таблицями будують криві, застосовуючи властивості речової частотної характеристики.

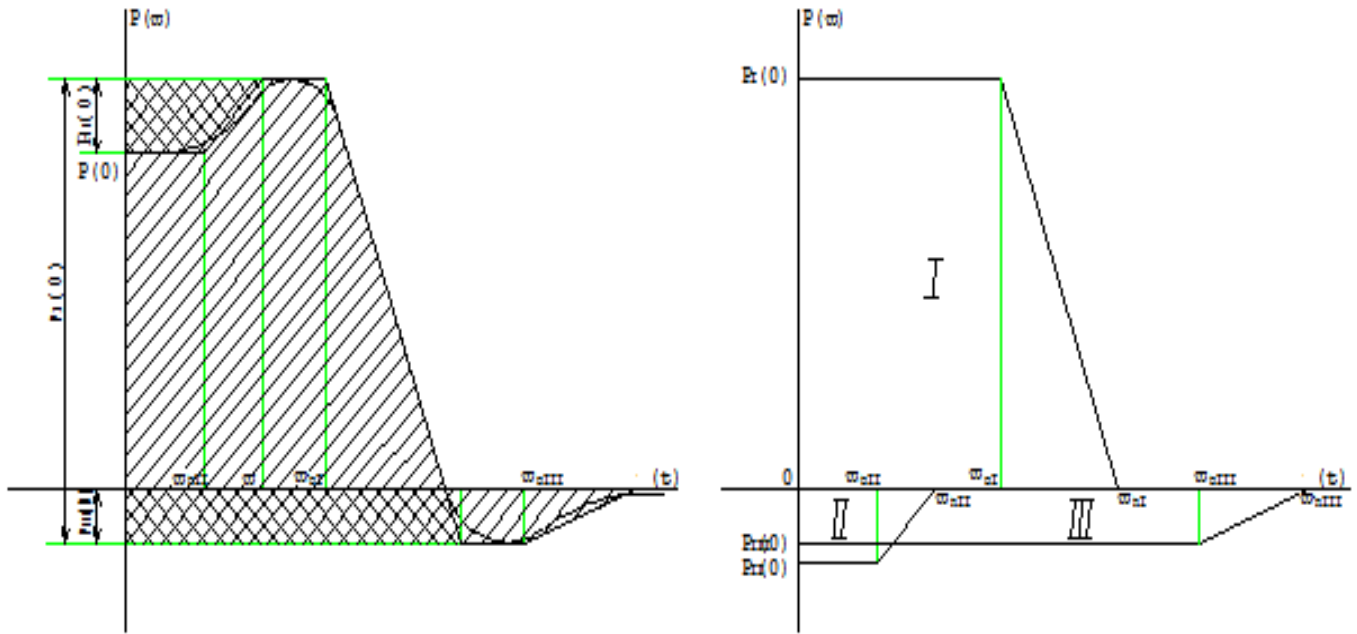


Рисунок 3.4 – Апроксимація речової частотної характеристики $P(\omega)$ декількома лінійними ділянками

Трапецеїдальні характеристика визначається висотою $P(0)$ при частоті $\omega = 0$, інтервалом рівномірного пропускання ω_0 , інтервалом позитивності ω_π і коефіцієнтом нахилу:

$$\chi = \omega_0 / \omega_\pi.$$

При цьому:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} P(0) \left[\sin \omega_0 t + \left(\frac{\omega_0}{\omega_\pi + \omega_0 t} \right) (\sin \omega_\pi t - \sin \omega_0 t) + \frac{1}{\omega_\pi + \omega_0} \left(\frac{\cos \omega_\pi t + \cos \omega_0 t}{t} \right) \right].$$

Для спрощення подальших обчислень приймають $P(0) = 1$, $\omega_\pi = 1$, тобто вводять поняття одиничної трапеції $P_m^{-1}(\omega)$, для якої справедливий вираз:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \left[si \chi i + \frac{1}{1 + \chi} \left(si \tau - si \chi i + \frac{\cos \tau + \cos \chi 0}{\tau} \right) \right],$$

де $\tau = \omega_\pi t$ – безрозмірний час, $si = \int_0^\infty \frac{\sin \omega i}{\omega} d\omega$ – інтегральний синус.

Існують типові універсальні таблиці h -функцій для різних значень χ . Для відомого значення χ реальної трапецеїдальної ВЧХ $P(\omega)$ за таблицею h -функцій складають таблицю перехідної функції $h_0(\tau)$, відповідної одиничної трапеції. Після цього, використовуючи властивості $P(\omega)$, перераховують масштаби і отримують функцію перехідного процесу (множать значення h_0 на $P(0)$ і ділять час τ на ω_π). Результати перерахунку $h_0(\tau)$ записують в таблицю $h(t)$ перехідної функції, за якою будують перехідну характеристику при одиничному впливі.

ТЕМА 4. РОЗРАХУНОК ОПТИМАЛЬНИХ НАСТРОЙОК РЕГУЛЯТОРА

Для регулювання об'єктами управління використовують типові регулятори (аналогові, дискретні). До дискретних регуляторів відносяться імпульсні, релейні та цифрові; аналогові реалізують типові закони.

Вхідним сигналом регулятора є величина помилки, яка визначається як різниця між заданим і поточним значеннями регульованого параметра ($e=x-y$). Вихідним сигналом є величина керуючого впливу u , що подається на об'єкт. Перетворення вхідного сигналу у вихідний згідно з типовими законами.

П-закон (пропорційне регулювання). Керуючий вплив має бути пропорційним величині помилки. Параметр настройки – коефіцієнт K_1 :

$$u = K \cdot e, \quad W_n(s) = K_1.$$

Якщо величина помилки стала дорівнювати, наприклад, одиниці, то керуючий вплив стане рівним K_1 (рис. 4.1).

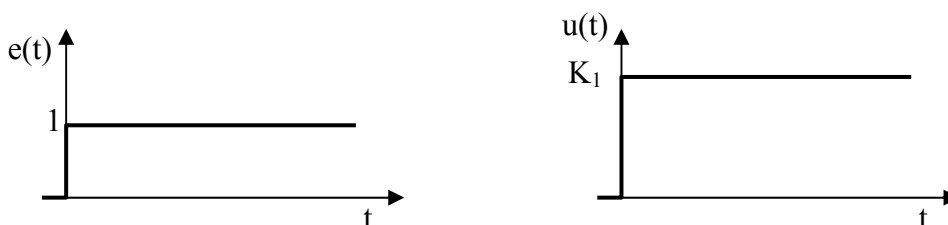


Рисунок 4.1 – Перехідна характеристика П-регулятора

Перевагою даного принципу регулювання у швидкодії. Недолік – наявність статичної помилки. Наприклад, якщо рідина витікає з ємності постійно, то рівень завжди буде менше заданого.

I-закон (інтегральне регулювання). Керуючий вплив пропорційно інтегралу від помилки. Тобто чим довше існує відхилення регульованого параметра від заданого значення, тим більше регулюючий вплив:

$$u = K_0 \int e(t) dt, \quad W_H(s) = \frac{K_0}{s}.$$

При виникненні помилки регулюючий вплив починає збільшуватися зі швидкістю, пропорційної величині помилки. Наприклад, при $e = 1$ швидкість буде дорівнює K_0 (рис. 4.2).

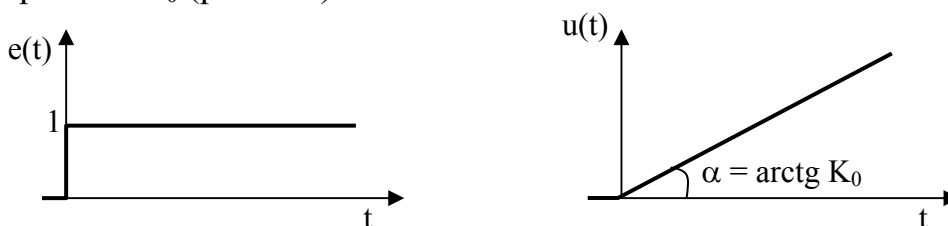


Рисунок 4.2 – Перехідна характеристика I-регулятора

Перевага даного принципу регулювання у відсутності статичної помилки, тобто при виникненні помилки регулятор буде збільшувати регулюючий вплив, поки не доб'ється заданого значення регульованої величини. Недолік – низька швидкодія.

Д-закон (диференціальне регулювання). Регулювання ведеться за величиною швидкості зміни регульованої величини:

$$u = K_2 \frac{de(t)}{dt}, \quad W_D(s) = K_2 s.$$

Тобто при швидкому відхиленні регулюючої величини регулюючий вплив за модулем буде більше. При повільному – менше.

Регулятор генерує керуючий вплив тільки при зміні регульованої величини. Наприклад, якщо помилка має вигляд ступінчастої сигналу $e = 1$, то на виході такого регулятора буде спостерігатися один імпульс (δ -функція). У цьому полягає його недолік, який зумовив відсутність практичного використання такого регулятора в чистому вигляді.

На практиці типові П-, І- і Д-закони регулювання рідко використовуються в чистому вигляді. Найчастіше вони комбінуються і реалізуються у вигляді ПІ-, ПД-, ПІД-регуляторів та ін.

ПІ-регулятор (пропорційно-інтегральний регулятор) являє собою два паралельно працюючих регулятори: П- і І-регулятори. Дане з'єднання поєднує в собі переваги обох регуляторів: швидкодія і відсутність статичної помилки. ПІ-закон регулювання описується:

$$u = K_0 \int e(t)dt + K_1 \cdot e(t), \quad W_{PI}(s) = K_1 + \frac{K_0}{s}.$$

Регулятор має два незалежні параметри (настройки): K_0 – коефіцієнт інтегральної частини і K_1 – коефіцієнт пропорційної. При виникненні помилки $e = 1$ керуючий вплив змінюється як показано на рис. 4.3.

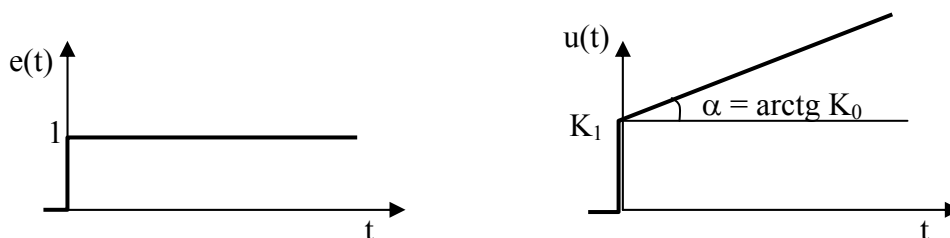


Рисунок 4.3 – Перехідна характеристика ПІ-регулятора

ПД-регулятор (пропорційно-диференціальний регулятор) включає в себе П- і Д-регулятори (рис. 4.4). Даний закон описується рівнянням:

$$u = K_1 \cdot e(t) + K_2 \frac{de(t)}{dt}, \quad W_{PD}(s) = K_1 + K_2 s.$$

Даний регулятор має найбільшу швидкодію, але також і статичну помилку. Реакція регулятора на одиничний вплив наведена на рис. 4.4.

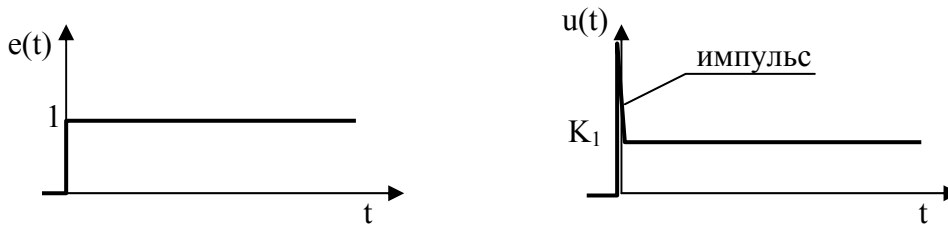


Рисунок 4.4 – Перехідна характеристика ПД-регулятора

ПД-регулятор (пропорційно-інтегрально-диференціальний регулятор)
Закон ПД-регулювання описується:

$$u = K_0 \int e(t) dt + K_1 \cdot e(t) + K_2 \frac{de(t)}{dt}, \quad W_{\text{ПД}}(s) = K_1 + \frac{K_0}{s} + K_2 s.$$

ПД-регулятор на відміну від інших має три настройки: K_0 , K_1 і K_2 .

Визначення оптимальних параметрів регуляторів

Регулятор, включений в АСР, може мати кілька настройок, кожна з яких може змінюватися в досить широких межах. При цьому при певних значеннях параметрів система буде управляти об'єктом відповідно до вимог, при інших настройках система буде нестійкою. Тому необхідно визначити настройки, що відповідають стійкій системі, і вибрати з них оптимальні.

Оптимальними настройками називаються настройки, які відповідають мінімуму (максимуму) показника якості. Найчастіше накладаються вимоги на час регулювання (мінімум) і ступінь загасання ($\Psi \geq \Psi_{\text{зад}}$). Однак, змінюючи настройки таким чином, щоб збільшити ступінь затухання, можемо прийти до дуже великого часу регулювання, що недоцільно. І навпаки, прагнучи зменшити час регулювання, ми отримуємо більш коливальні процеси з великим значенням Ψ .

Тому для визначення оптимальних настройок розроблений ряд методів: метод сканування площині налаштувань, формульний метод, метод D-розбиття.

Метод сканування полягає в розбитті області допустимих параметрів обраного регулятора з рівним кроком і визначенні показників якості для кожного набору настройок в вузлах отриманої сітки. Після перегляду всіх вузлів вибираються набори настройок, що відповідають найкращим показникам якості. Настройки можуть бути уточнені шляхом сканування околиці обраного вузла з більш дрібним кроком.

Формульний метод визначення параметрів регуляторів використовується для швидкої і наближеної оцінки значень параметрів.

Об'єкт може мати інерційну ланку з запізнюванням:

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-\tau \cdot s},$$

де K – коефіцієнт посилення;

T – постійна часу;

τ – запізнювання.

У такому випадку настройки П-, І-, ІІ і ІІД-регуляторів можуть бути розраховані за формулами (табл. 4.1) залежно від перехідного процесу.

Таблиця 4.1 – Приблизний розрахунок настройок безперервного регулятора

Регулятор	Аперіодичний процес	Процес з перерегулюванням 20%	Процес з міні часом регулювання
П	$K_1 = \frac{0,3 \cdot T}{K \cdot \tau}$	$K_1 = \frac{0,7 \cdot T}{K \cdot \tau}$	$K_1 = \frac{0,9 \cdot T}{K \cdot \tau}$
І	$K_0 = \frac{1}{4,5 \cdot K \cdot \tau}$	$K_0 = \frac{1}{1,7 \cdot K \cdot \tau}$	$K_0 = \frac{1}{1,7 \cdot K \cdot \tau}$
ІІ	$K_1 = \frac{0,6 \cdot T}{K \cdot \tau}$, $K_0 = \frac{1}{K \cdot \tau}$	$K_1 = \frac{0,7 \cdot T}{K \cdot \tau}$, $K_0 = \frac{1}{K \cdot \tau}$	$K_1 = \frac{T}{K \cdot \tau}$, $K_0 = \frac{1}{K \cdot \tau}$
ІІД	$K_1 = \frac{0,95 \cdot T}{K \cdot \tau}$, $K_0 = \frac{0,4 \cdot T}{K \cdot \tau^2}$, $K_2 = \frac{0,38 \cdot T}{K}$	$K_1 = \frac{1,2 \cdot T}{K \cdot \tau}$, $K_0 = \frac{0,6 \cdot T}{K \cdot \tau^2}$, $K_2 = \frac{0,48 \cdot T}{K}$	$K_1 = \frac{1,4 \cdot T}{K \cdot \tau}$, $K_0 = \frac{1,08 \cdot T}{K \cdot \tau^2}$, $K_2 = \frac{0,7 \cdot T}{K}$

Метод D-розбиття полягає у визначенні області настройок в просторі допустимих значень параметрів регулятора, що відповідають області стійкості або заданому показнику якості. Крива D-розбиття являє собою межу стійкості настройок і будується з використанням критерію стійкості.

Побудова кривої D-розбиття за методом Гурвіца зводиться до виводу системи нерівностей виду $\Delta_i \geq 0$, що визначають умову стійкості.

Приклад. Визначення області стійкості АСР за методом Гурвіца.

Структура АСР наведена на рис. 4.5.

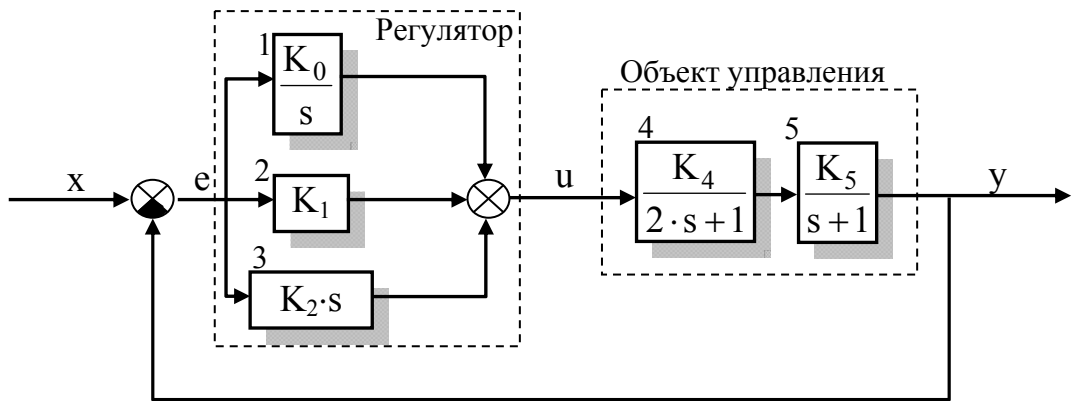


Рисунок 4.5 – Структурна схема АСР

Параметри $K_2 = 1$, $K_4 = 2$, $K_5 = 0,5$. Параметри K_0 і K_1 є змінними. Потрібно записати умову стійкості щодо K_0 і K_1 .

Для запису умови стійкості скористаємось критерієм Гурвіца. Характеристичне рівняння замкнутої системи має вигляд:

$$D(s) = 2 \cdot s^3 + 4 \cdot s^2 + (K_1 + 1) s + K_0.$$

Матриця має розмір 3×3 , так як ступінь $D(s)$ дорівнює 3:

$$\begin{pmatrix} 4 & K_0 & 0 \\ 2 & K_1 + 1 & 0 \\ 0 & 4 & K_0 \end{pmatrix}$$

Діагональні мінори матриці:

$$\Delta_1 = 4 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & K_0 \\ 2 & K_1 + 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (K_1 + 1) - 2 \cdot K_0 = 4 \cdot K_1 + 4 - 2 \cdot K_0,$$

$$\Delta_3 = K_0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & K_0 \\ 2 & K_1 + 1 \end{vmatrix} = K_0 \cdot \Delta_2.$$

За критерієм Гурвіца система стійка, якщо все $\Delta_i > 0$. Тоді отримуємо систему нерівностей ($\Delta_1 = 4$ задовольняє цій умові, далі не враховується):

$$\Delta_2 = 4 \cdot K_1 + 4 - 2 \cdot K_0 > 0 \quad K_0 < 2 \cdot K_1 + 2,$$

$$\Delta_3 = K_0 \cdot \Delta_2 > 0 \quad K_0 > 0.$$

Тобто умова стійкості можна запишеться: $0 < K_0 < 2 \cdot K_1 + 2$.

Графічно вона зображена на рис. 4.6.

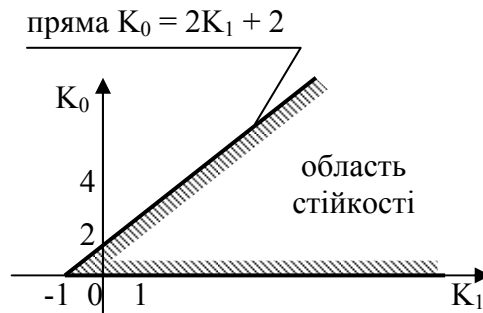


Рисунок 4.6 – Побудова області стійкості за критерієм Гурвіца

Крива D-розбиття в даному прикладі є прямою:

$$K_0 = 2K_1 + 2,$$

вище якої настройки відповідають нестійкою системі. Система з настройками, що взято з області стійкості, буде стійка.

Для систем з запізненням при визначенні межі стійкості можна скористатися критеріями Михайлова або Найквіста.

Методика визначення межі стійкості за критерієм Михайлова зводиться до вирішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}_D(\omega) = 0, \\ \operatorname{Im}_D(\omega) = 0. \end{cases}$$

Ця умова межі стійкості впливає з вимоги проходження годографа Михайлова (для системи, що знаходиться на межі стійкості) через початок координат, тобто точку з координатами ($\operatorname{Re} = 0, \operatorname{Im} = 0$).

Приклад. Визначення області стійкості АСР за критерієм Михайлова.

Розглянемо одноконтурну АСР, що складається з ПІ-регулятора ($W_p(s)$), об'єкта- ($W_{oy}(s)$) і негативного зворотного зв'язку:

$$W_p(s) = K_1 + \frac{K_0}{s}, \quad W_{oy}(s) = \frac{2}{3s+1} e^{-s}.$$

Характеристичне рівняння замкнутої системи:

$$D(s) = (K_1 s + K_0) 2 \cdot e^{-s} + s(3s + 1) = 3s^2 + s + 2(K_1 s + K_0) e^{-s}.$$

Підстановка $s = j\omega$ дає:

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= -3\omega^2 + j\omega + 2(jK_1\omega + K_0)(\cos\omega - j\sin\omega) = -3\omega^2 + j\omega + \\ &+ j2K_1\omega\cos\omega + 2K_1\omega\sin\omega + 2K_0\cos\omega - j2K_0\sin\omega = \operatorname{Re}_D + j\operatorname{Im}_D, \end{aligned}$$

де $\operatorname{Re}_D = -3\omega^2 + 2K_1\omega\sin\omega + 2K_0\cos\omega$,
 $\operatorname{Im}_D = \omega + 2K_1\omega\cos\omega - 2K_0\sin\omega$.

Прирівнювання отриманих виразів до нуля дає систему з двох рівнянь з трьома невідомими: K_0 , K_1 і ω :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}_D = -3\omega^2 + 2K_1\omega \sin \omega + 2K_0 \cos \omega = 0, \\ \operatorname{Im}_D = \omega + 2K_1\omega \cos \omega - 2K_0 \sin \omega = 0. \end{cases}$$

Рішення системи щодо K_0 и K_1 :

$$\begin{cases} K_0 = 0,5\omega \sin \omega + 1,5\omega^2 \cos \omega, \\ K_1 = 1,5\omega \sin \omega - 0,5 \cos \omega. \end{cases}$$

Варіюючи ω від 0 до нескінченності, в про-просторі K_0 та K_1 будується крива D-розбиття (рис. 4.7), яка обмежує область стійкості.

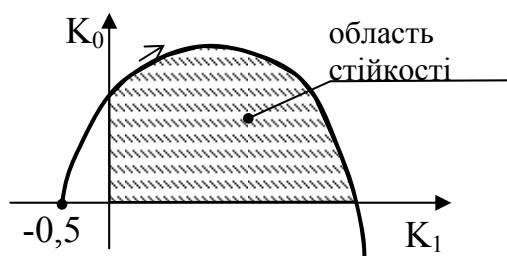


Рисунок 4.7 – Побудова області стійкості за критерієм Михайлова

Знання області стійкості для даної АСР дозволяє обмежити область пошуку оптимальних налаштувань. Пошук може здійснюватися шляхом сканування (в т.ч. зі змінним кроком) тільки області стійкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: Курс лекцій для студентів напряму 0925 “Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології ден. та заочн. форм навчання – (частина перша). – К.: НУХТ, 2004.
2. Кирюшин О.В. Управление техническими системами: курс лекций. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2004. – 116 с.
3. Сенигов П.Н. Теория автоматического управления: Конспект лекций. – Челябинск: ЮУрГУ, 2000. – 93 с.
4. Петраков Ю.В. Драчев О.И. Теория автоматического управления технологическими системами. – Машиностроение, 2009. – 336 с. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. – ДМК Пресс, 2011. – 800 с.
5. Емельянова Д.К. Построение АФЧХ системы автоматического регулирования в среде Maple // Молодой ученый. – 2016. – №10. – С. 197-201. – URL <https://moluch.ru/archive/114/30152/> (дата обращения: 24.01.2019).
6. Бесекерский В.А., Попов Е.М. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972. – 768 с.

7. Сапожников В. В. и др. Теоретические основы железнодорожной автоматики, телемеханики и связи / В.В. Сапожников, Ю.А. Кравцов, Вл.В. Сапожников. – М.: Транспорт, 1995. – 320 с.
8. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / В.А. Бесекерский, А.Н. Герасимов, Л.Ф. Порфирьев и др.; Под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Наука, 1972. – 587 с.
9. Воронов А.А. Теория автоматического управления. – М.: Высшая школа, 1986. – 367 с.
10. Солодовников В.В. и др. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования / В.В. Солодовников, В.Н. Плотников, А.В. Яковлев. – М.: Машиностроение, 1985. – 535 с.
11. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, 1971.
12. Спири К., Браун Р., Гудвин Дж. Теория управления. – М.: Мир, 1973.
13. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971.
14. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. – М.: Наука, 1979.
15. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975.
16. Лукас В.А. Теория автоматического управления. – М.: Недра, 1990. – 416 с.
17. Брюханов В.Н. и др. Теория автоматического управления. – М.: Высшая школа, 2000.
18. Теория автоматического управления. Учеб. для вузов по спец. "Автоматика и телемеханика". В 2-х ч./ Н.А. Бабаков, А.А. Воронов и др.: Под ред. А.А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 367 с.
19. Егоров К.В. Основы теории автоматического регулирования: учебное пособие для вузов, изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: "Энергия", 1967. – 648с., ил.
20. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления: Учеб. пособие для электротехн. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1973. – 528 с., ил.
21. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под редакцией В. А. Бесекерского. – М.: Наука, 1978.
22. Бронштейн И.Н., Семендяев К.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М.: Наука, 1986.