МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ “ТЕОРІЯ ІНФОРМАЦІЇ” ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.051001 –- МЕТРОЛОГІЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Дніпропетровськ УДХТУ 2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ “ТЕОРІЯ ІНФОРМАЦІЇ” ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.051001 –- МЕТРОЛОГІЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Затверджено на засіданні кафедри
автоматизації виробничих процесів.
Протокол № 6 від 2 лютого 2015 р.

Дніпропетровськ УДХТУ 2015

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни “Теорія інформації” для студентів напряму підготовки 6.051001 – Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології / Укл. : Г.І. Манко. – Дніпропетровськ : УДХТУ, 2015. – 33 с.

Укладач Г.І. Манко, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск О.П. Мисов, канд. техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять
з дисципліни “Теорія інформації”
для студентів напряму підготовки
6.051001 – Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології

Укладач: МАНКО Геннадій Іванович

Редактор Л.М. Тонкошкур
Коректор Л.Я. Гоцуцова

Підп. до друку ______________. Формат 60х84 1/16. Папір ксерокс. Друк різограф. Умовн.-друк. арк. ______Облік. – вид. арк. _______ Тираж _________прим. Зам. № ______
Свідоцтво ДК №303 від 27.12.2000.

УДХТУ, 49005, Дніпропетровськ-5, пр-т Гагаріна, 8

Видавничо-поліграфічний комплекс ІнКомЦентру

ВСТУП

Методичні вказівки призначені для роботи студентів напряму підготовки 6.051001 під час вивчення дисципліни **“**Теорія інформації**”** і мають за мету дати їм основи знань, що необхідні для засвоєння подальших дисциплін. Опанувавши курс, студенти повинні знати математичні моделі інформаційних процесів, методи оцінки кількості інформації, вміти аналізувати характеристики основних складових каналу передачі інформації, визначати кількісні характеристики інформаційних процесів.

Проектування систем і засобів вимірювання вимагає оцінки інформаційних властивостей сигналів і каналів для їх передачі. Тому значна увага приділена розрахункам ентропійних характеристик сигналів, оцінці пропускної спроможності каналів передачі, методам завадостійкого кодування інформації.

Для кращого засвоєння матеріалу навчального посібника його поділено на розділи, кожен з яких містить основні поняття та розрахункові співвідношення для розв’язання практичних задач.

Базовими дисциплінами курсу є "Філософія", “Вища математика”, “Спецглави математики (за професійним спрямуванням)”, “Фізика”. Дисципліна “Теорія інформації” забезпечує базові знання, необхідні для опанування дисциплін “Теорія електричних сигналів та кіл”, “Метрологія та вимірювання”, “Вимірювальні перетворювачі”, “Методи та засоби вимірювання”, “Аналогові та цифрові вимірювальні прилади”, “Інформаційно-вимірювальні системи”.

У процесі вивчення дисципліни студенти повинні користуватися рекомендованою літературою, перелік якої наведений наприкінці методичних вказівок.

1 ЕНТРОПІЯ СИГНАЛІВ

1.1 Ентропія дискретних повідомлень

Форма представлення інформації називається повідомленням. Повідомлення являє собою сукупність знаків або первинних сигналів, що містять інформацію. Повідомлення поділяють на дискретні і неперервні.

Суб'єкт або об'єкт, що породжує інформацію і представляє її у вигляді повідомлення, називають джерелом інформації.

Дискретне джерело інформації володіє кінцевим алфавітом, що складається з n елементів $x_1, x_2, ..., x_n$, кожен з яких характеризується ймовірностями $P(x_1)$, $P(x_2)$, …, $P(x_n)$. Сукупність елементів та їх ймовірності зручно задавати у вигляді матриці

$$\begin{Vmatrix} X \\ P \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P_1 & P_2 & \dots & P_n \end{Vmatrix}.$$

Чисельною характеристикою невизначеності появи елемента x_i виступає часткова ентропія, яка є тим більшою, чим менша ймовірність $P(x_i)$:

$$H(x_i) = -\log_a P(x_i). \quad (1.1)$$

Для всієї сукупності дискретних повідомлень невизначеність визначається ентропією, яка обчислюється усередненням за ймовірностями часткових ентропій (1.1):

$$H(X) = -\sum P(x_i)\log P(x_i)\,. \quad (1.2)$$

Ентропія (1.2) відповідає вимогам, які пред'являються до міри невизначенності. Вона дорівнює нулю, коли ймовірність одного значення x_i дорівнює одиниці, а інших значень – нулю, тобто коли маємо безальтернативне повідомлення. Ентропія максимальна, якщо всі повідомлення рівноймовірні, тобто $P(x_1)=P(x_2)= \ldots = P(x_n)=1/n$. При цьому ентропія

$$H(X) = -\sum \frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = \log n\,. \quad (1.3)$$

Вибір основи логарифмів неістотний. Загальноприйнято використовувати двійкові логарифми і визначати кількість ентропії у бітах.

При обчисленні ентропії малоймовірні результати можна без великої помилки виключити. Внеском складових формули (1.2), для яких $P(x_i)>0{,}95$ або $P(x_i)<0{,}05$, можна нехтувати.

1.2 Ентропія неперервних повідомлень

Повідомлення, які передаються неперервними сигналами, є неперервними. Неперервне повідомлення як випадковий процес описується густиною $f(x)$ розподілу ймовірностей.

Розіб'ємо діапазон значень неперервного повідомлення на невеликі ділянки Δx_i. Ймовірність попадання значення повідомлення в інтервал Δx_i приблизно дорівнює $f(x_i)\cdot\Delta x_i$, де $f(x_i)$ – густина ймовірності для точки, що лежить посередині Δx_i. Тоді ентропію неперервного повідомлення можна визначити так:

$$H(X) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\sum_i f(x_i)\Delta x_i \log f(x_i)\Delta x_i\right) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \lim_{\Delta x\to 0}\log\Delta x.$$

Враховуючи, що $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, отримаємо

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log f(x)dx - \lim_{\Delta x\to 0}\log\Delta x = h(X) - \lim_{\Delta x\to 0}\log\Delta x. \quad (1.4)$$

Перша складова виразу (1.4) називається диференціальною ентропією неперервного повідомлення. Друга складова при $\Delta x=const$ набуває сталого значення і з розгляду виключається.

Якщо закон розподілу величини X рівномірний, то густина ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}}. \quad (1.5)$$

Диференціальна ентропія рівномірно розподіленої величини

$$h(X) = -\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}}.\log \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}}.dx = \log(X_{\max} - X_{\min}), \quad (1.6)$$

а повна ентропія

$$H(X) = h(X) - \log \Delta = \log \frac{X_{\max} - X_{\min}}{\Delta}. \quad (1.7)$$

Для нормального закону розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(X)} e^{-\frac{X^2}{2\sigma^2(X)}}, \quad (1.8)$$

де $\sigma(X)$ – середньоквадратичне відхилення значень X.

Диференціальна ентропія

$$h(X) = -\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} f(X)\Delta \log f(X)dx = \log[(\sqrt{2\pi e}\sigma(X)]. \quad (1.9)$$

Повна ентропія

$$H(X) = h(X) - \log \Delta = \log \frac{(\sqrt{2\pi e}\sigma(X)}{\Delta}. \quad (1.10)$$

1.3 Умовна ентропія

Якщо послідовність символів алфавіту не є незалежною (наприклад, в іноземних мовах після букви «q» майже завжди слідує «u»), невизначеність повідомлення (а, отже, і ентропія) зменшується. В цьому випадку використовується умовна ентропія.

Статистичний зв'язок очікуваного повідомлення з попереднім повідомленням кількісно оцінюється спільною ймовірністю $P(x_i, x_i)$ або умовною ймовірністю $P(x_i/x_i)$, яка виражає ймовірність появи елементу повідомлення x_i при умові, що попереднім елементом було x_i. Часткова ентропія згідно (1.1) буде рівною:

$$H(x_i/x_j) = -\log P(x_i/x_j). \quad (1.11)$$

Далі здійснюємо усереднення часткової ентропії. Отримуємо ентропію повідомлення X при умові, що мав місце елемент x_i:

$$H(X/x_j) = -\sum P(x_i/x_j) \log P(x_i/x_j). \quad (1.12)$$

Нарешті, усереднюємо ентропію (1.12) по ймовірностях попередньої появи усіх можливих елементів

$$H(X / X) = -\sum_j P(x_j) \sum_i P(x_i / x_j) \log P(x_i / x_j). \quad (1.13)$$

Важливою властивістю умовної ентропії джерела залежних повідомлень є те. що при незмінній кількості елементів повідомлень ентропія зменшується із збільшенням числа елементів, між якими існує статистичний взаємозв'язок.

Користуючись поняттям умовної ентропії, можна визначити ентропію об'єднаної системи через ентропію її складових частин.

Якщо дві системи X та Y об'єднується в одну, то ентропія об'єднаної системи дорівнює ентропії одній з її складових частин плюс умовна ентропія другої частини відносно першої:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X). \tag{1.14}$$

У окремому випадку, коли системи X та Y незалежні, $H(Y/X) = H(Y)$, і маємо теорему складання ентропій:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y). \tag{1.15}$$

1.4 Приклади і задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.1. На вхід каналу передачі надходять сигнали, які в момент t_1 дорівнюють x_1=20 В, x_2=19 В, x_3=21 В. Ймовірності появи сигналів дорівнюють: $P(x_1)$=0,9, $P(x_2)$=0,07, $P(x_3)$=0,03. В момент t_2 надходять сигнали x_1=30 В, x_2=27 В, x_3=33 В. Ймовірності появи сигналів дорівнюють: $P(x_1)$=0,07, $P(x_2)$=0,9, $P(x_3)$=0,03. Визначити ентропію дискретних повідомлень для моментів часу t_1 та t_2.

Розв'язування

Відповідно до формули (1.2) знаходимо:

$H(X,t_1) = – 0{,}9\,log0{,}9 – 0{,}07\,log0{,}07 – 0{,}03\,log0{,}03 = 0{,}558$ біт.

$H(X,t_2) = – 0{,}07\,log0{,}07 – 0{,}9\,log0{,}9 – 0{,}03\,log0{,}03 = 0{,}558$ біт.

Як бачимо, $H(X,t_1) = H(X,t_2)$, хоча сигнали набувають різних фізичних значень

Задача 1.2. На вхід каналу передачі надходять сигнали, ймовірності появи яких дорівнюють: $P(x_1)$=0,01, $P(x_2)$=0,7, $P(x_3)$=0,29. Визначити ентропію дискретних повідомлень та порівняти $H(x_1,x_2,x_3)$ і $H(x_2,x_3)$.

Розв'язування

Відповідно до формули (1.2) знаходимо:

$H(x_1,x_2,x_3) = – 0{,}01\,log0{,}01 – 0{,}7\,log0{,}7 – 0{,}29\,log0{,}29 = 0{,}944$ біт.

$H(x_2,x_3) = – 0{,}7\,log0{,}7 – 0{,}29\,log0{,}29 = 0{,}878$ біт.

Порівнюючи $H(x_1,x_2,x_3)$ і $H(x_2,x_3)$, знаходимо, що ентропія $H(x_2,x_3)$ складає 93% ентропії $H(x_1,x_2,x_3)$. Звідси випливає, що коли виконуються розрахунки з точністю 7%, то внеском складової ентропії значення x_1 можна знехтувати.

Задача 1.3. Визначити ентропію повідомлень системи, яка контролює параметр X. Параметр X може набувати значень: x_1 – норма; x_2 – більше норми; x_3 – менше норми з ймовірностями, наведеними в табл.. 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані до задачі 1.3

Параметр	Остання цифра номера варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x_1)$	0,8	0,85	0,76	0,75	0,6	0,65	0,5	0,45	0,4	0,35
Параметр	Передостання цифра номера варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x_2)$	0,15	0,12	0,1	0,2	0,3	0,21	0,35	0,4	0,45	0,5

Задача 1.4. Лінією зв'язку передається неперервний сигнал $x(t)$, розподілений за нормальним законом з математичним очікуванням $m_x = 0$ і дисперсією $\sigma_x^2 = 8$. Визначити ентропію $H(X)$ сигналу при точності його виміру $\Delta x = 0{,}2B$.

Розв'язування

Згідно умови задачі густина ймовірності сигналу $x(t)$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2},$$

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\log p(x)dx - \log\Delta x = -\frac{1}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ln p(x)dx - \log\Delta x =$$

$$-\frac{1}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left[\ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right]dx - \log\Delta x = -\frac{1}{\ln 2}\left(\ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}\right) - \log\Delta x =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\ln\sqrt{2\pi e\sigma^2} - \log\Delta x = \log\frac{\sqrt{2\pi e\sigma^2}}{\Delta x}.$$

Підставляємо числові значення:

$$H(X) = \log\frac{\sqrt{2\pi e 8}}{0{,}2} \cong 5{,}87 \text{ дв. ед.}$$

Задача 1.5. Визначити ентропію вимірів величини $x(t)$ зі зведеною похибкою γ (див. табл.. 1.2), якщо її значення розподілені за рівномірним законом у межах від a до $a+b$.

Таблиця 1.2 – Вихідні дані для задачі 1.5

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Похибка γ, %	0,1	0,2	0,25	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Варіант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Похибка γ, %	1,2	1,4	1,6	1,7	1,8	2	2,5	3	4	5

Задача 1.6. Визначити диференціальну ентропію вимірів величини *X*, якщо її значення розподілені за експоненціальним законом:

$$f(X)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda X} \text{ при } X \ge 0;\\ 0 \text{ при } X < 0.\end{cases}$$

Значення λ прийняти рівним номеру варіанта

1.1 Запитання для самоконтролю

1. Поясніть суть поняття “ентропія”.
2. Сформулюйте основні властивості ентропії.
3. Як визначається ентропія дискретних повідомлень?
4. Як визначається ентропія неперервних повідомлень?
5. Що таке диференціальна ентропія?

2 КІЛЬКІСТЬ ІНФОРМАЦІЇ У ПОВІДОМЛЕННІ

2.1 Теоретичні відомості і розрахункові співвідношення

Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є значеннями джерела повідомлень *X*, заданими апріорними ймовірностями $P(x_1)$, $P(x_2)$, …, $P(x_n)$, то $H(X)$ – це середня невизначеність стану джерела. Внаслідок передачі повідомлення *X* по каналу на його виході одержуємо повідомлення *Z* зі значеннями $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Наявність завад у каналі передачі порушує однозначну відповідність між сигналами *Z* та *X*. Отже, при приманні повідомлення z_j неможливо точно встановити, яке зі значень *X* було передане. Можна лише говорити про умовну ймовірність передачі значення x_i за умови, що було прийняте значення z_j.. У випадку отримання значення z_j апостеріорні ймовірності значень джерела повідомлень будуть умовними $P(x_1/z_j)$, $P(x_2/z_j)$, …, $P(x_n/z_j)$. Невизначеність відносно переданого значення оцінюється, аналогічно (1.1), частковою умовною ентропією

$$H(x_i/z_j) = -\log P(x_i/z_j)\,. \tag{2.1}$$

Кількість одержаної при цьому інформації на одне значення (часткової інформації) є різниця між початковою і остаточною невизначеностями:

$$I(z_j/x_i) = H(x_i) - H(x_i/z_j) = \log\frac{P(x_i/z_j)}{P(x_i)}\,. \tag{2.2}$$

Середня кількість інформації про всі значення повідомлення *X* одержується шляхом усереднення за умовними ймовірностями:

$$I(z_j/X) = \sum_i P(x_i/z_j) I(z_j/x_i) = \sum_i P(x_i/z_j)\log\frac{P(x_i/z_j)}{P(x_i)}\,. \tag{2.3}$$

Здійснивши усереднення (2.3) за всіма ймовірностями значень z_j, дістанемо формулу визначення кількості інформації про всю сукупність *X* у сигналі *Z*:

$$I(Z/X) = \sum_j P(z_j) I(z_j/X) = \sum_j\sum_i P(z_j)P(x_i/z_j)\log\frac{P(x_i/z_j)}{P(x_i)}\,. \tag{2.4}$$

Згідно формули сумісної ймовірності $P(z_j)P(x_i/z_j)=P(x_i,z_j)$. Таким чином,

$$I(Z/X)=\sum_j\sum_i P(x_i,z_j)\log\frac{P(x_i,z_j)}{P(x_i)P(z_j)}. \qquad (2.5)$$

З урахуванням того, що формулу сумісної ймовірності можна записати в іншому вигляді

$$P(x_i,z_j)=P(x_i)P(z_j/x_i),$$

формулу (2.5) можна представити і так

$$I(Z/X)=-\sum_i P(x_i)\log P(x_i)+\sum_j P(z_j)\sum_i P(x_i/z_j)\log P(x_i/z_j)=H(X)-H(X/Z). \qquad (2.6)$$

Тут $H(X/Z)$ – умовна ентропія.

Для переходу до неперервних повідомлень виразимо ймовірності через функції густини ймовірностей

$$P(x_i)=f(x_i)\Delta x_i;$$

$$P(x_i/z_j)=f(x_i/z_j)\Delta x_i;$$

$$P(x_i,z_j)=f(x_i,z_j)\Delta x_i\Delta z_j.$$

Підставимо ці вирази у формули (2.6) та (2.7) і, здійснивши граничний перехід при $\Delta x_i\to 0$, $\Delta z_i\to 0$, одержимо:

$$I(Z/X)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(X)\log f(X)dX+\int_{-\infty}^{\infty} f(X,Z)\log f(X/Z)dXdZ=h(X)-h(X/Z). \qquad (2.8)$$

2.2 Приклади і задачі для самостійного розв’язання

Задача 2.1. Визначити кількість інформації на виході системи, яка контролює параметр X. Параметр X може набувати значень: x_1 – норма; x_2 – більше норми; x_3 – менше норми з ймовірностями: $P(x_1)=0{,}9$; $P(x_2)=0{,}05$; $P(x_3)=0{,}05$. Внаслідок завад мають місце помилки, тобто замість x_1 може бути зафіксовано x_2 або x_3, замість x_2 – x_1 або x_3, замість x_3 – x_1 або x_2. Умовні ймовірності таких подій дорівнюють 0,01.

Розв’язування

Введемо позначення для результатів контролю: z_1 – система контролю вказує, що параметр має значення x_1, z_2 – що параметр має значення x_2, z_3 – що параметр має значення x_3. Тоді умовні ймовірності:

$P(z_1/x_2)=0{,}01$; $P(z_1/x_3)=0{,}01$; $P(z_1/x_1)=0{,}98$;
$P(z_2/x_1)=0{,}01$; $P(z_2/x_3)=0{,}01$; $P(z_2/x_2)=0{,}98$;
$P(z_3/x_1)=0{,}01$; $P(z_1/x_2)=0{,}01$; $P(z_3/x_3)=0{,}98$.

На підставі (2.6) маємо:

$I(Z/X)=H(X)-H(X/Z)$;

$H(X)=-\sum_i P(x_i)\log P(x_i)=-0{,}9\log 0{,}9-2(0{,}05\log 0{,}05)=0{,}569$ біт.

За формулою повної ймовірності

$$P(z_j) = \sum_i P(x_i) \log P(z_j / x_i),$$

тобто

$P(z_1)$=0,9·0,98+0,05·0,01+0,05·0,01=0,883;

$P(z_2)$=0,9·0,01+0,05·0,98+0,05·0,01=0,0585;

$P(z_2)$=0,9·0,01+0,05·0,01+0,05·0,98=0,0585.

Умовні ймовірності $P(x_i/z_j)$ визначимо за формулою Байєса:

$$P(x_i / z_j) = \frac{P(x_i)P(z_j / x_i)}{P(z_i)};$$

$P(x_1/z_1)$=0,9989; $P(x_1/z_2)$=0,15386; $P(x_1/z_3)$=0,15386;

$P(x_2/z_1)$=0,00055; $P(x_2/z_2)$=0,83761; $P(x_2/z_3)$=0,00854;

$P(x_3/z_1)$=0,00055; $P(x_3/z_2)$=0,00854; $P(x_3/z_3)$=0,83761.

Умовна ентропія

$$H(X/Z) = -\sum_j P(z_j) \sum_i P(x_i / z_j) \log P({}_i / z_j) = 0{,}094 \text{ біт.}$$

Кількість інформації

$$I(Z/X) = 0{,}569 - 0{,}094 = 0{,}475 \text{ біт.}$$

Задача 2.2. Вимірювана величина змінюється від X_0 до X_0+A, і розподілена за законом рівної ймовірності, а похибка вимірювання – за нормальним. Дисперсія похибки дорівнює $8/(\pi e)$. Визначити кількість інформації в одному вимірі, якщо A=256.

Розв'язування

Згідно з законом рівної ймовірності

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{A} \text{ при } X_0 < X < X_0 + A; \\ 0 \text{ при } X_0 > X > X_0 + A \end{cases}$$

Згідно (2.4) диференціальна ентропія

$$h(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(X) \log f(X) dX = -\int_{X_0}^{X_0+A} \frac{1}{A} \log \frac{1}{A} dX = \log A = \log 256 = 8 \text{ біт.}$$

Згідно з нормальним законом розподілу

$$f(X/\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X)^2}{2\sigma^2}}.$$

Умовна ентропія

$$h(X/\sigma) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(X/\sigma) \log f(X/\sigma) dX = \log \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2} \log e = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2}.$$

Оскільки дисперсія $\sigma^2 = \frac{8}{\pi e}$, то

$$h(X/\sigma) = \log \sqrt{2\pi e \frac{8}{\pi e}} = \log 4 = 2 \text{ біт.}$$

Кількість інформації

$I(X/\sigma) = h(X) - h(X/\sigma) = 8 - 2 = 6$ біт.

Задача 2.3. Неперервна випадкова величина X розподілена згідно нормального закону. Вона вимірюється з похибкою Δ, що також підкоряється нормальному розподілу. Вихідною величиною є випадкова величина $Z=X+\Delta$. Чому дорівнює кількість інформації, якщо X і Δ незалежні, їх середні значення дорівнюють 0, а дисперсії $\sigma^2_X = 16$, $\sigma^2_\Delta = 9$?

Задача 2.4. На вході каналу передачі сигнал X набуває значень x_1; x_2 ; x_3 з ймовірностями: $P(x_1)$=0,8; $P(x_2)$=0,1; $P(x_3)$=0,1. Визначити кількість інформації у повідомленні Z, що надходить до одержувача, якщо ймовірності значень сигналу Z є рівними $P(x_1)$=0,6; $P(x_2)$=0,2; $P(x_3)$=0,2, а умовні ймовірності $P(z_j/x_i)$ дорівнюють наведеним у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до задачі 2.3

	X_1	X_2	X_3
Z_1	0,9	0,04	0,06
Z_2	0,1	0,8	0,1
Z_3	0	0,16	0,84

Розв'язування

Кількість інформації визначається формулою:

$I(Z/X) = H(X) - H(X/Z)$.

Ентропія сигналу X

$H(X) = -\sum_i P(x_i)\log P(x_i) = -0{,}8\log 0{,}8 - 2(0{,}1\log 0{,}1) = 0{,}922$ біт.

Умовна ентропія $H(X/Z)$

$H(X/Z) = -\sum_j P(z_j)\sum_i P(x_i/z_j)\log P(_i/z_j) = -$ 0,6(0,9log0,9 + 0,04log0,04 +

+ 0,06log0,06) – 0,2(0,1log0,1 + 0,8log0,8 + 0,1log0,1) – 0,2(0,16log0,16+

+ 0,84log0,84) = 0,651 біт.

Кількість інформації у повідомленні Z про сигнал X

$I(Z/X)$ =0,92–0,611=0,271 біт.

Задача 2.5. Вимірювана величина і похибка вимірювання розподілені за законом рівної ймовірності (див. рис. 3.1). Визначити кількість інформації в одному вимірі, якщо вимірювана величина представлена сигналом 4–20 мА, а точність вимірювання ±1 мА.

Задача 2.6. Для умов задачі 2.1 визначити кількість інформації на виході системи, якщо ймовірності значень параметра X дорівнюють $P(x_1)$, $P(x_2)$, $P(x_3)$ (див. табл.. 2.2), а умовні ймовірності помилок дорівнюють Q.

Задача 2.7. Визначити середню кількість інформації, що приходиться на один символ повідомлення 01001000101001.

Таблиця 2.2 – Вихідні дані до задачі 2.6

Пара-метр	Остання цифра шифру									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(x_1)$	0,95	0,92	0,85	0,82	0,8	0,78	0,76	0,72	0,7	0,65
$P(x_2)$	0,03	0,04	0,07	0,08	0,05	0,08	0,09	0,1	0,2	0,15
$P(x_3)$	0,02	0,04	0,08	0,1	0,15	0,14	0,15	0,18	0,1	0,2
	Передостання цифра шифру									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q	0,1	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2	0,22	0,24	0,26	0,28

2.3 Запитання для самоконтролю

1. Поясніть зв’язок між ентропією і інформацією.
2. Як кількісно оцінюється інформація при повній або неповній вірогідності повідомлень?
3. Як кількісно оцінюється інформація дискретних сигналів?
4. Як кількісно оцінюється інформація неперервних сигналів?

3 ПРОПУСКНА СПРОМОЖНІСТЬ КАНАЛУ ПЕРЕДАЧІ

3.1 Теоретичні відомості і розрахункові співвідношення

3.1.1 Дискретний канал без завад

При передаванні по каналу зв’язку досить великої кількості вимірювальної інформації швидкість передачі можна вважати постійною і визначати за формулою

$$R = \lim_{T\to\infty} \frac{I_T(Z, X)}{T} = const, \qquad (3.1)$$

де $I_T(Z, X)$ – кількість інформації, яка передається за час T.

Швидкість передачі залежить від методу кодування, властивостей каналу та інших факторів. Найбільша можлива для каналу швидкість передачі називається пропускною спроможністю каналу

$$C = \sup\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{I_T}{T}\right\}. \qquad (3.2)$$

У каналі без завад кожному значенню вхідного сигналу x_i відповідає одне й теж значення сигналу на виході z_j. У цьому випадку середня кількість інформації

$$I(Z/X) = H(X).$$

Швидкість створення інформації

$$R_{ств} = \frac{H(X)}{\tau_{ср}}, \qquad (3.3)$$

де τ_{cp} – середня тривалість передачі одного елемента інформації. При відсутності статистичної залежностями між елементами:

$$\tau_{cp} = \sum_i P(x_i)\tau_{x_i}\,. \tag{3.4}$$

Максимально можлива кількість інформації має місце при рівномірному розподілі ймовірностей елементів інформації:

$$I_{\max}(Z/X) = H_0(X) = \log n,$$

де *n* – кількість таких елементів.

Пропускна спроможність каналу без завад

$$C = \sup\left\{\frac{H(X)}{\tau_{cp}}\right\}. \tag{3.5}$$

У випадку передачі *n* рівноймовірних елементів інформації:

$$C = \frac{\log n}{\tau_{cp}} = R_{cp}\log n\,, \tag{3.6}$$

де $R_{cp} = \dfrac{1}{\tau_{cp}}$ – середня щвидкість передачі одного елемента інформації.

3.1.2 Дискретний канал із завадами

При наявності завад у каналі передачі маємо ймовірнісний характер зв’язку між вхідним і вихідним сигналами каналу, який записується у вигляді матриці перехідних ймовірностей

$$\left\| P(z_j / x_i) \right\|, \tag{3.7}$$

де $P(z_j / x_i)$ – ймовірність заміни *i*-го значення сигналу на вході каналу *j*-тим значенням сигналу на виході.

Середня кількість інформації на елемент інформації визначається формулою (2.6) і залежить від законів розподілу ймовірностей значень сигналу *X* та умовних ймовірностей (3.7). Пропускна спроможність каналу з завадами обчислюється за формулою:

$$C = R_{cp} I_{\max}(Z, X)\,, \tag{3.8}$$

де $I_{\max}(Z, X)$ обчислюється за формулою (2.6) за всіма можливими розподілами ймовірності, які характеризують джерело інформації.

У випадку передачі двійкових кодів при рівній ймовірності появи нуля чи одиниці розрахунок кількості інформації будемо проводити наступним чином. Вважаємо, що джерело інформації виробляє два значення сигналу x_1=0, x_2=1. Якщо ймовірність помилки передачі позначити *Q*, можна побудувати граф перехідних ймовірностей (рис. 3.1).

Апріорні ймовірності значень сигналу $P(x_1)=P(x_2)=0{,}5$. В силу симетричності графа апостеріорні ймовірності також будуть однакові: $P(z_1)=P(z_2)=0{,}5$. Матриця перехідних ймовірностей

$$\left\| P(z_j / x_i) \right\| = \left\| \begin{matrix} Q & (1-Q) \\ (1-Q) & Q \end{matrix} \right\|, \tag{3.9}$$

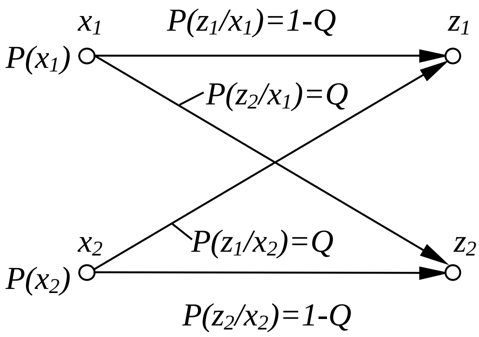

Рис. 3.1

Згідно формули Байєса

$$P(x_i / z_j) = \frac{P(x_i)P(z_j / x_i)}{P(z_i)}.$$

Оскільки $P(x_i)=P(z_j)=0{,}5$, то $P(x_i / z_j)=P(z_j / x_i)$.

Кількість інформації $I(Z/X) = H(X) - H(X/Z)$. Ентропія сигналу, що приймає n рівноймовірних значень $H(X)=\log n$. Умовна ентропія

$$H(X/Z) = -\sum_j P(z_j)\sum_i P(x_i / z_j)\log P(x_i / z_j) = -2\cdot 0{,}5[Q\log Q + (1-Q)\log(1-Q)].$$

Отже, кількість інформації, що передається одним розрядом двійкового коду

$$I(Z/X) = 1 + Q\log Q + (1-Q)\log(1-Q). \qquad (3.10)$$

3.1.3 Неперервний канал без завад

Неперервний сигнал розглядають як ліміт дискретного при зменшенні до нуля двох величин: кванта ΔX сигналу при його квантуванні і параметра дискретизації у часі ΔT.

Інтервал дискретизації визначається теоремою Котельникова

$$\Delta T \le \frac{1}{2 f_c}, \qquad (3.11)$$

де f_c – найбільша частота спектру сигналу. Інтервал ΔT визначає необхідну швидкість передачі імпульсів дискретизованого сигналу по каналу передачі:

$$R_{cp} = \frac{1}{\Delta T} = 2 f_c, \qquad (3.12)$$

Максимальна кількість інформації у квантованому сигналі

$$I_{\max}(Z, X) = H_{\max}(X) = \log m = \log(\frac{X_{\max}}{\Delta X} + 1), \qquad (3.13)$$

де m кількість рівнів квантування, які містяться в інтервалі можливої зміни сигналу $0 \le X \le X_{max}$.

3.1.4 Неперервний канал із завадами

Пропускна спроможність неперервного каналу із завадами визначається загальним співвідношенням (3.7), в якому $R_{cp} = 2 f_c$, а кількість інформації визначиться шляхом граничного переходу для формули (2.6) при $\Delta X \to 0$:

$$I(Z/X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(X)\log p(X)dX + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(Z)p(X/Z)\log p(X/Z)dXdZ = h(X) - h(X/Z). \qquad (3.14)$$

З урахуванням сказаного, пропускна спроможність каналу:

$$C = 2f_c[h(X) - h(X/Z)]_{\max}. \qquad (3.15)$$

3.2 Приклади і задачі для самостійного розв’язання

Задача 3.1. Джерело інформації виробляє чотири значення сигналу x_1, x_2, x_3, x_4 з апріорними ймовірностями $P(x_1)=P(x_2)=0{,}3$; $P(x_3)=0{,}25$; $P(x_4)=0{,}15$ і тривалістю $\tau_1=10^{-5}$ с, $\tau_2=2\cdot10^{-5}$ с, $\tau_3=4\cdot10^{-5}$ с, $\tau_4=1{,}5\cdot10^{-5}$ с. Визначити швидкість створення інформації.

Розв’язування

Середня ентропія джерела:

$$H(X) = -\sum_i P(x_i)\log P(x_i) = -2(0{,}3\log 0{,}3) - 0{,}25\log 0{,}25 - 0{,}15\log 0{,}15 = 1{,}9527 \text{ біт.}$$

Середня тривалість сигналу

$$\tau_{cp} = \sum_i P(x_i)\tau_{x_i} = (0{,}3 + 0{,}3\cdot 2 + 0{,}25\cdot 4 + 0{,}15\cdot 1{,}5)\cdot 10^{-5} = 2{,}125\cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

Швидкість створення інформації

$$R = \frac{H(X)}{\tau_{cp}} = \frac{1{,}9527}{2{,}125\cdot 10^{-5}} = 91893 \text{ бит/с.}$$

Задача 3.2. У каналі передачі без завад використовується двійковий код з шістьма різними рівноймовірними символами. Тривалість всіх символів однакова і дорівнює 10^{-6} с. Визначити пропускну спроможність каналу передачі інформації.

Розв’язування

Пропускна здатність дискретного каналу без завад

$$C = \frac{\log n}{\tau_{cp}},$$

де n кількість можливих різних повідомлень. Для шестизначного двійкового коду $n=2^6$. Отже

$$C = \frac{\log 2^6}{10^{-6}} = 6\cdot 10^6 \text{ бит/с.}$$

Задача 3.3. Канал передачі із завадами характеризується матрицею ймовірностей

$$\left\| P(x_i, z_j) \right\| = \begin{Vmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{Vmatrix}.$$

Визначити пропускну спроможність каналу передачі інформації, якщо тривалість τ_{cp} всіх сигналів однакова і дорівнює 10^{-4} с.

Розв'язування

Додаючи ймовірності $P(x_\mathrm{i},z_j)$ по рядках матриці ймовірностей, одержимо ймовірності $P(x_\mathrm{i})$:

$P(x_1)$=0,3; $P(x_2)$=0,3; $P(x_3)$=0,4.

Аналогічно сумуванням по стовпцям одержимо ймовірності $P(z_j)$:

$P(z_1)$=0,1; $P(z_2)$=0,7; $P(z_3)$=0,2.

Згідно формули сумісної ймовірності умовні ймовірності $P(z_j/x_\mathrm{i})$ отримаємо розділивши $P(x_\mathrm{i},z_j)$ на $P(x_\mathrm{i})$:

$$\left\| P(z_j / x_i) \right\| = \begin{Vmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{Vmatrix},$$

а ймовірності $P(x_\mathrm{i}/z_j)$ – розділивши $P(x_\mathrm{i},z_j)$ на $P(z_j)$:

$$\left\| P(x_i / z_j) \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2/7 & 0 \\ 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & 2/7 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Кількість інформації визначається формулою:

$I(Z/X) = H(X) - H(X/Z)$.

Ентропія сигналу X

$$H(X) = -\sum_i P(x_i)\log P(x_i) = -2(0{,}3\log 0{,}3) - 0{,}4\log 0{,}4 = 1{,}57 \text{ біт.}$$

З урахуванням того, що $P(x_i/z_j)\log P(x_i/z_j)$=0, коли ймовірність дорівнює 0 або 1, знайдемо умовну ентропію $H(X/Z)$:

$$H(X/Z) = -\sum_j P(z_j)\sum_i P(x_i/z_j)\log P(x_i/z_j) = 0{,}7\left[-\frac{2}{7}\log\frac{2}{7} - \frac{3}{7}\log\frac{3}{7} - \frac{2}{3}\log\frac{2}{3}\right] = 1{,}09 \text{ біт.}$$

Кількість інформації

$I(Z/X)$=1,57–1,091=0,48 біт.

Оскільки

$$\tau_{cp} = \sum_i P(x_i)\tau_{x_i} = (0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}4)\cdot 10^{-4} = 10^{-4} \text{ с,}$$

то пропускна спроможність каналу:

$$C = \frac{1}{\tau_{cp}} I\ (Z, X) = \frac{1}{10^{-4}} 0{,}48 = 4800 \text{ бит/с.}$$

Задача 3.4. Передача одного байта інформації по послідовному каналу без завад займає 10 мкс. Визначити пропускну спроможність каналу передачі інформації.

Задача 3.5. Джерело інформації виробляє три повідомлення з ймовірностями $P(x_1)$=0,2; $P(x_2)$=0,3; $P(x_3)$=0,5 та тривалостями τ_1=1 мкс, τ_2=2 мкс, τ_3=3 мкс.

Канал передачі з завадами характеризується матрицею перехідних ймовірностей:

$$\left\| P(z_j / x_i) \right\| = \begin{Vmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{Vmatrix}.$$

На виході каналу передачі маємо множину повідомлень $\{z_j\}$ з ймовірностями $P(z_1)$=0,4; $P(z_2)$=0,3; $P(z_3)$=0,3.

Визначити пропускну спроможність каналу передачі інформації.

Розв'язування

Кількість інформації на виході каналу визначається формулою (3.6):

$I(Z/X) = H(X) - H(X/Z)$.

Ентропія сигналу X

$$H(X) = -\sum_i P(x_i)\log P(x_i) = -0,2\log 0,2 - 0,3\log 0,3 - 0,5\log 0,5 = 1,485 \text{ біт.}$$

Умовна ентропія $H(X/Z)$

$$H(X/Z) = -\sum_j P(z_j)\sum_i P(z_j/x_i)\log P(z_j/x_i) =$$

=-0,4·2·0,2log0,2 – 0,3·0,3log0,3 – 0,3(0,1log0,1 +0,2log0,2)=0,767 біт.

Кількість інформації

I(Z/X)=1,485-0,767=0,718 біт.

Середня тривалість передачі повідомлення

$\tau_{cp} = \sum_i P(x_i)\tau_{x_i}$=0,2·1+0,3·2+0,5·3=2,3 мкс.

Пропускна спроможність

$$C = \frac{1}{\tau_{cp}} I\ (Z, X) = \frac{1}{2,3 \cdot 10^{-6}} 0,718 = 312173 \text{ біт/с.}$$

Задача 3.6. Джерело інформації виробляє три повідомлення з ймовірностями $P(x_i)$ згідно табл.. 2.2. Передача повідомлень триває час τ_i, наведений у табл.. 3.1. Визначити пропускну спроможність каналу. Ймовірність помилки передачі Q взяти з табл.. 2.2.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі 3.6

Пара-метр	Остання цифра шифру									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ_1, мс	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0,5

τ_2, мкс	100	150	200	250	300	350	400	450	500	50
Пара-метр	Передостання цифра шифру									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ_3, мс	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8	0,2	0,32	0,44	0,56	0,28

Задача 3.7. Джерело виробляє інформацію зі швидкістю $R_{ср}$=150 біт/с, що передається через два канали передачі. Кожний канал може передавати за одиницю часу N=80 двійкових знаків. Ймовірність нуля та одиниці однакова**,** ймовірність помилки Q=0,15. З'ясувати, чи достатня пропускна спроможність цих каналів для передачі інформації від джерела.

Розв'язування

Джерело інформації виробляє два значення сигналу x_1=0, x_2=1. Ймовірності цих значень $P(x_1)=P(x_2)=0{,}5$. Кількість інформації, що передається одним розрядом двійкового коду:

$$I(Z,X)=1+Q\log Q+(1-Q)\log(1-Q)=0{,}3903.$$

Час, що витрачається на передачу одного двійкового знака

$$\tau_{cp}=\frac{1}{80}\text{ с.}$$

Пропускна спроможність одного каналу

$$C=\frac{1}{\tau_{cp}}I(Z,X)=80\cdot 0{,}3903=31{,}2\text{ біт/с.}$$

Максимальна кількість інформації, що може бути передана по двох каналах за одиницю часу

$2C$=2·31,2=62,4 біт/с.

Це недостатньо для передачі інформації, що створюється зі швидкістю 150 біт/с.

Задача 3.8. Керування виконавчим механізмом здійснюється сигналом з широтно-імпульсною модуляцією. Необхідна ширина імпульсу змінюється від 1 мс до 1024 мс і формується з допомогою генератора опорної частоти $f_т$= 1 кГц. Визначити необхідну пропускну спроможність каналу передачі такого сигналу.

Розв'язування

Оскільки канал передачі має передавати модульовані сигнали, будемо вважати його неперервним і використовувати для розрахунку пропускної спроможності формулу (3.7), в яку підставляємо швидкість створення та інформації згідно формул (3.9) та (3.10) відповідно.

З теорії сигналів відомо, що практична ширина спектру при урахуванні 95% енергії імпульсу становить

$$\omega\ =2\pi f_з=\frac{3\pi}{2\tau},$$

звідки

$$f_з = \frac{1}{6\tau} = \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} = 166{,}7 \text{ Гц.}$$

Ширина імпульсів формується з дискретністю $q = 1/f_т = 10^{-3}$ с.

Задача 3.9. Датчик виробляє сигнал з шириною спектру f_c (див. табл. 3.2). Сигнал направляється через канал передачі з пропускною спроможністю *C* до контролера, де подається на *n*-розрядний АЦП. Визначити, чи достатня пропускна спроможність каналу, якщо завади незначні.

Таблиця 3.2 – Вихідні дані для задачі 3.9

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ширина спектру f_c, Гц	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Розрядність АЦП *n*	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
Пропускна спроможність С, Кбіт/с	1	5	2	1	1	5	2,4	5	5	10
Варіант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Ширина спектру f_c, Гц	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Розрядність АЦП *n*	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
Пропускна спроможність, Кбіт/с	1	5	2	5	5	10	12	5	16	5
Варіант	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Ширина спектру f_c, Гц	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Розрядність АЦП *n*	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
Пропускна спроможність С, Кбіт/с	5	5	2	5	5	12	2,4	5	20	5

Задача 3.10. Датчик, призначений для вимірювання рівномірно розподіленої величини, має табл._дію *k* вимірів за секунду і виробляє *m*-розрядний двійковий код. Визначити, чи можна використати для передачі цього коду в центральний комп’ютер послідовний інтерфейс, який може передавати за секунду *N* біт. Ймовірність нуля та одиниці однакові, ймовірність помилки передачі *Q* (див. табл.. 3.3).

3.3 Запитання для самоконтролю

1. Що розуміється під швидкістю передачі інформації та пропускною здатністю каналу передачі?
2. Дайте характеристику каналу передачі із завадами і без завад.
3. Якими характеристиками визначаються сигнал і канал передачі?
4. Чим викликана необхідність узгодження джерела сигналу і каналу передачі?

Таблиця 3.3 – Вихідні дані для задачі 3.10

Варіант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Розрядність *m*	8	12	16	18	24	8	12	16	18	24
Швидкодія *k*	10000	1000	100	10	10	200	1000	200	200	20

Швидкість N, Кбіт/с	100	10	10	1	1	5	100	100	10	1
Ймовірність помилки Q	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,25	0,2	0,15
Варіант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Розрядність m	8	12	16	18	24	8	12	16	18	24
Швидкодія k	5000	500	50	100	25	100	250	500	50	50
Швидкість N, Кбіт/с	100	10	10	2	5	2	100	50	12	25
Ймовірність помилки Q	0,12	0,11	0,2	0,1	0,25	0,15	0,12	0,2	0,2	0,15
Варіант	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Розрядність m	16	16	12	12	24	14	8	8	18	18
Швидкодія k	5000	500	50	100	50	100	250	500	500	50
Швидкість N, Кбіт/с	200	10	5	2	5	2	100	50	24	8
Ймовірність помилки Q	0,12	0,12	0,2	0,15	0,18	0,1	0,12	0,2	0,2	0,15

4 КОДУВАННЯ СИГНАЛІВ

4.1 Теоретичні відомості і розрахункові співвідношення

Процес представлення інформації у вигляді кодів є суттю процесу кодування. При кодуванні змінюється структура символів, якими представляється інформація на вході і виході кодувального пристрою (КП), але не повинна змінюватись кількість інформації, яка міститься у кодах.

Кодування має сенс тоді, коли потужність N множини Y, яка описує вихідну інформацію, не більша від потужності N_0 множини X, що відповідає початковій інформації. Довжина коду визначається виразом

$$n \geq]\log_2 N[, \qquad (4.1)$$

де знаком][означена операція округлення до більшого цілого числа. Звідси потужність кодуючої множини можна виразити як

$$N \geq 2^n. \qquad (4.2)$$

При простому кодуванні будь-якому елементу x_i початкової інформації відповідає одна конкретна кодова комбінація з множини вихідних кодів.

Для побудови простого кодувального пристрою можна використати шифратор без пам’яті, входами якого є елементи повідомлень, а виходами – розряди двійкового коду. На виході каналу передачі треба мати дешифратор, що працює за алгоритмом, зворотним до алгоритму шифратора (рис. 4.1).

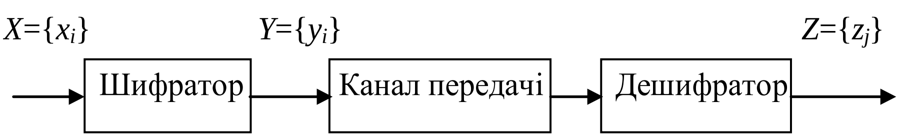

Рис. 4.1

В ході передачі інформації по каналу зв’язку внаслідок дії завад коди можуть бути спотворені. Для характеристики ступеня відповідності прийнятої інформації переданій уводять поняття завадостійкості. Під завадостійкістю розуміють або здатність системи протистояти шкідливій дії завад або здатність відновлювати спотворену інформацію із заданою достовірністю.

Щоб мати можливість відновлення інформації, застосовують відповідне завадостійке кодування.

Теорія завадостійкого кодування базується на наступній теоремі Шенона: для будь якої швидкості інформації, меншої, ніж пропускна спроможність каналу передачі, існує код, при використанні якого ймовірність помилкового декодування буде скільки завгодно мала.

Завадостійкі коди дозволяють виявляти і усувати помилки, викликані завадами.

Число спотворених символів у n-розрядній кодовій комбінації називається кратністю помилки. Число помилок i-ї кратності дорівнює числу сполучень $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. Загальне число помилок:

$$E = \sum_{i=1}^{g} C_n^i , \tag{4.3}$$

де g – урахована кратність помилок.

При взаємно-незалежних помилках ймовірність спотворення i символів у n-розрядній кодовій комбінації така:

$$P_i = C_n^i p_e^i (1 - p_e)^{n-i} , \tag{4.4}$$

де p_e – ймовірність створення одного символу комбінації. Загальна ймовірність помилки з урахуванням помилок однократних, двократних і т.д. до g-кратних:

$$P_{пом} = \sum_{i=1}^{g} C_n^i p_e^i (1 - p_e)^{n-i} , \tag{4.5}$$

При побудові завадостійкого коду задаються числом N елементів інформації, які треба закодувати, кратністю g помилок, які треба виявити. Кількість інформаційних розрядів коду

$$k =]\log N[. \tag{4.6}$$

Для отримання завадостійкого коду до інформаційних розрядів додаються m надмірних розрядів, кількість яких залежить від загального числа можливих помилок:

$$m = \log (1+E). \tag{4.7}$$

Загальна довжина коду

$$n = k+m. \tag{4.8}$$

Для виявлення однократних помилок застосовують контроль парності. Для цього в код додається один надмірний розряд, який називається контрольним. Значення цього розряду визначається як сума за модулем 2 всіх інформаційних розрядів. Якщо інформаційна частина коду має парне число двійкових одиниць, то в контрольному розряді буде нуль, у випадку непарного числа одиниць в інформаційних розрядах у контрольному розряді стоїть одиниця, тобто загальне число одиниць у коді завжди парне. На приймальній стороні каналу передачі. перевіряється кількість одиниць у прийнятому коді. Якщо число одиниць непарне, то має місце помилка.

Можливий як протилежний варіант контроль непарності, коли у коді, що передається число одиниць завжди непарне.

Коди з контролем парності (непарності) дозволяють виявити помилки непарної кратності. Ймовірність виявлення спотворених кодів

$$P_{в.п.} = \sum_{i=1,3,5,...}^{n} C_n^i p_e^i (1 - p_e)^{n-i}\ , \tag{4.9}$$

а ймовірність невиявлених помилок

$$P_{н.п.} = \sum_{i=2,4,6,...}^{n} C_n^i p_e^i (1 - p_e)^{n-i}\ . \tag{4.10}$$

Наступний варіант завадостійкого коду – код з подвоєнням елементів, коли кожний розряд вхідної комбінації доповнюється додатковим розрядом, значення якого є інверсним по відношенню до початкового значення. Наприклад, вхідна кодова комбінація 101 представляється кодом 100110. Загальна довжина такого коду $n = 2k$.

Код з подвоєнням елементів виявляє всі помилки, за винятком кратних помилок у парних розрядах. Ймовірність невиявлених помилок

$$P_{н.п.} = \sum_{i=1.}^{k} C_k^i p_e^{2i} (1 - p_e)^{n-2i}\ . \tag{4.11}$$

Ще один варіант – інверсні коди, які будуються за наступним алгоритмом:

а) визначається парність (чи непарність) кількості одиниць у інформативній частині коду;

б) до інформативної частини додається повторення її в прямому коді, якщо кількість одиниць парна, або в інверсному коді, якщо кількість одиниць непарна.

Наприклад, маємо закодувати дві комбінації: 0011 та 1101. Перша комбінація має парну кількість одиниць, тож додаємо до неї таку ж комбінацію. Результуючий код 00110011. У другій комбінації непарне число одиниць, для неї треба додати її інверсний код: 11010010.

Як і у випадку коду з подвоєнням елементів число надмірних розрядів дорівнює числу розрядів первинного коду (до кодування). Інверсне кодування дозволяє виявити практично всі помилки, за винятком тих випадків, коли одночасно спотворюються 4, 8 і т.д. елементів, наприклад, два в первинному коді і два в надмірних розрядах. Звідси ймовірність невиявлених помилок

$$P_{н.п.} = \sum_{i=4,8,...}^{n} C_n^i p_e^i (1 - p_e)^{n-i}\ . \tag{4.12}$$

Ефективність інформаційної системи – це здатність її забезпечувати передачу, приймання. обробку, перетворення і подання інформації найекономічнішим способом. Одним з критеріїв оцінки ефективності інформаційної системи є швидкість передачі інформації:

$$v = \frac{I}{T}, \tag{4.13}$$

де I – кількість інформації, що передається за час T.

Для порівняльної оцінки ефективності різних систем використовується критерій питомої швидкості передачі інформації:

$$R_п = \frac{v}{F} = \frac{I}{FT}, \tag{4.14}$$

де F – смуга частот сигналу.

4.2 Приклади і задачі для самостійного розв’язання

Задача 4.1. Закодувати шість елементів повідомлень двійковими простими кодами.

Розв'язування

Довжина коду згідно (4.1):

$n \geq]\log_2 N[=]\log_2 6[=]2,5[= 3$.

Потужність кодуючої множини

$N \geq 2^n = 2^3 = 8$.

Це кодові комбінації 000,001,…,111. Кожному елементу інформації від першого до шостого можна поставити у відповідність одну з цих кодових комбінацій. Кодова комбінація 000 у кодуванні участі не бере, бо вона відповідає відсутності повідомлень. Можливі варіанти кодування представимо у табличному вигляді (табл. 4.1)

Табл. 4.1

Елементи інформації	Кодові комбінації	
	Варіант 1	Варіант 2
Перший	001	101
Другий	010	100
Третій	011	110
Четвертий	100	001
П’ятий	101	111
Шостий	110	011

Задача 4.2. Визначити ймовірність однократних, двократних і трикратних помилок у кодовій 5-розрядній комбінації, якщо ймовірність спотворення одного символу комбінації p_e =0,001.

Розв'язування

$P_1 = C_n^i p_e^i (1 - p_e)^{n-i} = C_5^1 0,001(1 - 0,001)^4 = 49,81 \cdot 10^{-4}$;

$P_2 = C_5^2 0,001^2 (1 - 0,001)^3 = 0,097 \cdot 10^{-4}$;

$P_3 = C_5^3 0,001^3 (1 - 0,001)^2 = 9,681 \cdot 10^{-9}$;

$P_{пом} = P_1 + P_2 + P_3 = 49{,}9 \cdot 10^{-4}$.

Задача 4.3. Закодувати шість елементів інформації кодами з контролем парності.

Розв'язування

Кількість інформаційних розрядів згідно (4.6)
k =]log N[=]log6[=3.
Загальна кількість розрядів коду з контролем парності
n = k+1.
Результати кодування запишемо у таблицю 4.2.

Табл. 4.2

Елементи інформації	Код	
	Інформаційні розряди	Контрольний розряд
Перший	001	1
Другий	010	1
Третій	011	0
Четвертий	100	1
П’ятий	101	0
Шостий	110	0

Задача 4.4. Закодувати 10 елементів інформації інверсними кодами.

Задача 4.5. Порівняти ймовірності невиявлення кодів з контролем парності і з подвоєнням елементів, якщо треба закодувати 18 елементів інформації, а ймовірність спотворення одного розряду дорівнює 0,001.

Розв'язування

Число інформаційних розрядів
k =]log N[=]log18[=5.
Для коду з контролем парності довжина коду n = k+1=6. Для коду з подвоєнням елементів n = 2k =10.
Ймовірність невиявлення кодів з контролем парності

$$P_{н.п.} = \sum_{i=2,4,6,...}^{n} C_n^i p_e^i (1-p_e)^{n-i} = \sum_{i=2,4,6,...}^{6} C_6^i p_e^i (1-p_e)^{6-i} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Ймовірність невиявлення кодів з подвоєнням елементів

$$P_{н.п.} = \sum_{i=1,2,3,...}^{k} C_k^i p_e^{2i} (1-p_e)^{n-2i} = \sum_{i=1}^{5} C_k^i 10^{-3\cdot 2i} (1-10^{-3})^{10-2i} = 0{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Таким чином, завадостійкість коду з подвоєнням елементів утричі вище завадостійкості кодів з контролем парності.

Задача 4.6. Оцінити ефективність передачі інформації за допомогою двійкових сигналів, якщо їх тривалість τ=0,001 с, ймовірності нуля та одиниці однакові, а ймовірність спотворення $Q=5\cdot10^{-4}$.

Розв'язування

Оцінимо ефективність передачі інформації згідно (4.13) і (4.14). Як було визначено в задачі 3.4, кількість інформації визначається виразом

$I=H(X)–H(X/Z)=1+Q\log Q+(1–Q)\log(1–Q)=0,9938$ біт.

Ефективність передачі інформації

$$v=\frac{I}{\tau}=\frac{0.9938}{0.001}=993{,}8 \text{ біт/с.}$$

Якщо передача здійснюється за допомогою одиничних прямокутних імпульсів, то τ=1/*F* і питома швидкість передачі інформації

$$R=\frac{v}{F}=\tau\cdot v=0{,}001\cdot993{,}8=0{,}9938 \text{ біт/с.}$$

Задача 4.7. Оцінити ефективність передачі інформації за допомогою інверсного коду, якщо число інформаційних розрядів *k*=5, ймовірність спотворення розряду *Q*=0,01, тривалість його передачі τ=0,001 с, кількість елементів інформації *N*=27.

Розв'язування

Кількість інформації

$I=H(X)–H(X/Z)$.

При допущені однакової ймовірності появи елементів інформації апріорна ентропія:

$H(X)=\log N=\log 27=4{,}755$ біт.

Ентропія після одержання повідомлення:

$H(X/Z)=P_{н.п}\log P_{н.п}+(1-P_{н.п})\log(1-P_{н.п})$,

де $P_{н.п}$ – ймовірність невиявлених помилок для інверсного коду:

$$P_{н.п.}=\sum_{i=1}^{k}C_k^i p_e^{2i}(1-p_e)^{n-2i}.$$

Тут $n=2k$ – кількість елементів інверсного коду; p_e – ймовірність спотворення одного розряду кодової комбінації, що в нашому випадку є рівним *Q*. Звідси:

$$P_{н.п.}=\sum_{i=1}^{5}\frac{5!}{i!(5-i)!}10^{-8i}(1-10^{-8i})^{10-2i}==0{,}0005.$$

Таким чином:

H(X/Z)= 0,0005log0,0005+(1–0,0005)log(1–0,0005)=0,0057 біт/пов.

Ефективність передачі інформації

$$v=\frac{I}{2k\tau}=\frac{4{,}755+0{,}0057}{2\cdot 5\cdot 10^{-3}}=47607 \text{ біт/с.}$$

Задача 4.8. Оцінити ефективність передачі інформації за допомогою одиничних імпульсів, якщо їх тривалість τ, а ймовірність спотворення P_e. (див. табл. 4.3).

Таблиця 4.3 – Вихідні дані до задачі 4.8

Параметр	Остання цифра номера варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ, c	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,002
Параметр	Передостання цифра номера варіанту									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_e	$1\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-4}$

4.3 Запитання для самоконтролю

1. Що таке кодування сигналу?
2. Як визначається довжина простого коду?
3. У чому суть завадостійкого кодування?
4. Як визначається довжина завадостійкого коду?
5. Як будуються коди з можливістю виявлення помилок?
6. Порівняйте достоїнства і недоліки різних варіантів кодування.

5 ЕФЕКТИВНЕ КОДУВАННЯ

5.1 Теоретичні відомості і розрахункові співвідношення

Ідея ефективного двійкового кодування ґрунтується на теоремі Шенона про кодування для дискретних каналів без завад. Згідно з цією теоремою, швидкість передачі можна зробити максимальною шляхом відповідного кодування:

$$v_{k\max}=\frac{C}{H(X)}. \tag{5.1}$$

Для цього треба статистично погоджувати джерело і канал. Це досягається так: найбільш вірогідні повідомлення кодуються коротшими кодовими комбінаціями, а менш вірогідні довшими. В цьому випадку середня тривалість кодової комбінації

$$\tau_{cp} = \tau_0 n_{cp} = \tau_0 \sum_i P_i n(x_i), \tag{5.2}$$

де τ_0 − тривалість двійкового символу; n_{cp} − середнє число символів в повідомленні; $n(x_i)$ − число кодових символів для i-го повідомлення x_i; P_i − ймовірність цього повідомлення.

Джерело буде узгоджено з двійковим каналом, коли $I(X) = C$. Звідси слідує

$$n_{cp\min} = H(X); \quad v_{k\max} = \frac{1}{\tau_0 n_{cp\min}}. \tag{5.2}$$

Код, що забезпечує рівність (5.2), має найбільшу ефективність $\eta = \nu_k/\nu_{k\max}$.

Найбільше поширені дві методики побудови ефективного коду: алгоритм Шенона-Фано і алгоритм Хафмена. Останній алгоритм забезпечує однозначну побудову коду.

Розглянемо алгоритм Хафмена. Складається таблиця. У таблиці виписуються в основний стовпець повідомлення в порядку убування їх ймовірності. Два останні повідомлення об'єднуються в одне допоміжне повідомлення. Йому приписується сумарна ймовірність. Ймовірності знову розташовуються в порядку їх убування в додатковому стовпці, де два останні повідомлення об'єднуються. Процес триває до отримання допоміжного стовпця з ймовірністю, рівній одиниці.

Згідно з цією таблицею, будується кодове дерево у вигляді графа. При русі з вершини дерева з ймовірністю P=1 ребрам графа привласнюються відповідна ймовірність і кодові символи, наприклад, "1" при виході з вузла в лівий бік і "0" при виході з вузла у правий бік. Рух по кодовому дереву з вершини до повідомлення, визначуваного відповідною ймовірністю, дає кодову комбінацію для повідомлення.

5.2 Приклади і задачі для самостійного розв’язання

Задача 5.1. Ансамбль з N=9 повідомлень x_i (i = 1, …, N) на виході джерела X має наступні ймовірності їх появ, задану вектор-рядком P_x = [0.04 0.06 0.08 0.10 0.10 0.12 0.15 0.15 0.20].

Виконати кодування ефективним двійковим кодом методом Хафмена. Вичислити ентропію повідомлень і середню довжину n_{cp} кодового слова. Порівняти з мінімально можливою довжиною $n_{cp.min}$.

Розв'язування

Цю задачу доцільно розв’язувати у програмному середовищі MATLAB, яке використовує матричне представлення змінних. Складемо матрицю M, в якій ймовірності виписуються в перший (основний) стовпець в порядку їх убування, тобто

$$P_o = [\ 0.2\ 0.15\ 0.15\ 0.12\ 0.1\ 0.1\ 0.08\ 0.06\ 0.04\ ]^т.$$

Тут верхній індекс "т" означає операцію транспонування рядка у стовпець.

Дві останніх ймовірності об'єднуються в одну допоміжну ймовірність $P_{s1} = 0.06+0.04 = 0.1$.

Ймовірності $P_{x1} = [\ 0.20\ 0.15\ 0.15\ 0.12\ 0.10\ 0.10\ 0.08\ 0.1\ 0\ ]$ знову розташовуються в порядку їх убування в додатковому стовпці P_{d1} матриці M:

$$P_{d1} = [\ 0.2\ 0.15\ 0.15\ 0.12\ 0.1\ 0.1\ 0.1\ 0.08\ 0\ ]^т.$$

Дві останні ненульові ймовірності рядка P_{x1} об'єднуються в одну допоміжну ймовірність $P_{s2} = 0.1+0.08 = 0.18$.

Ймовірності $P_{x2} = [\ 0.20\ 0.15\ 0.15\ 0.12\ 0.10\ 0.10\ 0.18\ 0\ 0\ ]$ знову розташовуються в порядку їх убування в додатковому стовпці:

$$P_{d2}= [\ 0.2\ 0.18\ 0.15\ 0.15\ 0.12\ 0.1\ 0.1\ 0\ 0\ ]^т.$$

Дві останні ненульові ймовірності P_{x2} об'єднуються в одну допоміжну ймовірність $P_{s3} = 0.1+0.1 = 0.2$.

Ймовірності $P_{x3} = [\ 0.20\ 0.18\ 0.15\ 0.15\ 0.12\ 0.20\ 0\ 0\ 0\ ]$ знову розташовуються в порядку їх убування в додатковому стовпці:

$$P_{d3} = [\ 0.2\ 0.2\ 0.18\ 0.15\ 0.15\ 0.12\ 0\ 0\ 0\ ]^т.$$

Дві останні ненульові ймовірності P_{x3} об'єднуються в одну допоміжну ймовірність $P_{s4} = 0.15+0.12 = 0.27$.

Ймовірності $P_{x4} = [\ 0.20\ 0.20\ 0.18\ 0.15\ 0.27\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]$ знову розташовуються в порядку їх убування в додатковому стовпці:

$$P_{d4} = [\ 0.27\ 0.2\ 0.2\ 0.18\ 0.15\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]^т.$$

Дві останні ненульові ймовірності P_{x4} об'єднуються в одну допоміжну ймовірність $P_{s5} = 0.18+0.15 = 0.33$.

Ймовірності $P_{x5} = [\ 0.27\ 0.2\ 0.2\ 0.33\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]$ знову розташовуються в порядку їх убування в додатковому стовпці:

$$P_{d5} = [\ 0.33\ 0.27\ 0.2\ 0.2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]^т.$$

Дві останні ненульові ймовірності P_{x5} об'єднуються в одну допоміжну ймовірність $P_{s6} = 0.2+0.2 = 0.4$.

Ймовірності $P_{x6} = [\ 0.33\ 0.27\ 0.4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]$ знову розташовуються в порядку їх убування в додатковому стовпці:

$$P_{d6} = [\ 0.4\ 0.33\ 0.27\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]^т.$$

Дві останні ненульові ймовірності P_{x6} об'єднуються в одну допоміжну ймовірність $P_{s7} = 0.33+0.27 = 0.6$.

Ймовірності $P_{x7} = [\ 0.4\ 0.6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]$ знову розташовуються в порядку їх убування в додатковому стовпці:

$$\mathrm{P_{d7}} = [\ 0.6\ 0.4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]^т.$$

Дві останні ненульові ймовірності P_{x7} об'єднуються в одну допоміжну ймовірність $P_{s8} = 0.6+0.4 = 1$.

Ймовірності $P_{x8} = [\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]$ знову розташовуються в порядку їх убування в додатковому стовпці:

$$P_{d8} = [\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]^{T}.$$

При отриманні додаткового стовпця з ймовірністю, рівній одиниці, процес закінчується. Матриця *M*, на основі якої проводиться кодування, набирає вигляду:

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.27 & 0.33 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.15 & 0.15 & 0.18 & 0.2 & 0.2 & 0.27 & 0.33 & 0.4 & 0 \\ 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.18 & 0.2 & 0.2 & 0.27 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0.12 & 0.15 & 0.15 & 0.18 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.12 & 0.15 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.08 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.06 & 0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

На підставі цієї таблиці будуємо кодове дерево (рис. 5.1), гілки якого відповідають ймовірностям згідно з матрицею М.

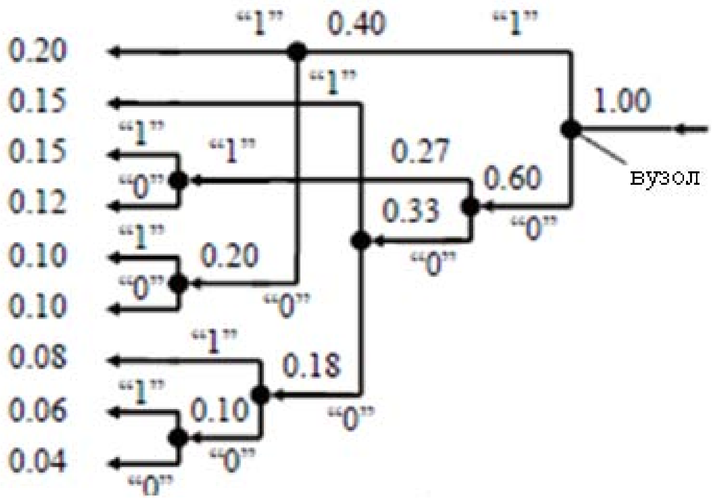

Рис. 5.1

Кожній гілці дерева привласнюється символ "1" при виході з вузла вгору і символ "0" при виході з вузла вниз. Рух по кодовому дереву з вершини з P=1.00 до повідомлень, визначуваних відповідною ймовірністю, дає двійкові кодові комбінації ефективного коду, наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Повідомлення	Ймовірність	Двійковий код
x1	0.04	00000
x2	0.06	00001
x3	0.08	0001
x4	0.10	100
x5	0.10	101
x6	0.12	010
x7	0.15	011
x8	0.15	001
x9	0.20	11

Згідно з таблицею кодування 5.1, довжину кодових комбінацій можна описати вектор-рядком n = [5 5 4 3 3 3 3 3 2].

Середня довжина кодового слова в бітах

$$n_{cp} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} n_i = 3{,}444.$$

Ентропія джерела повідомлень

$$H(X) = -\sum P(x_i)\log P(x_i) = 3{,}038 \text{ біт.}$$

Згідно (5.2), мінімально можлива середня довжина кодового слова дорівнює ентропії джерела, тобто

$n_{cp.\min}$ = H(X); $n_{cp.\min}$ = 3,038 біт.

У разі рівномірного двійкового кодування дев'яти повідомлень потрібне чотирирозрядне кодове слово для кожного повідомлення, оскільки $2^3<9<2^4$. При такому кодуванні максимальна середня довжина кодового слова

$n_{cp.\max}$ = 4 біт.

Оскільки $n_{cp.min}<n_{cp}<n_{cp.max}$, проведене кодування ефективніше, ніж рівномірне, проте не досягає максимально можливої ефективності.

Задача 5.2. Побудувати код Хафмена для ансамблю повідомлень { x_i } (i=1, …, 5) з ймовірностями P_x = [0.2 0.2 0.2 0.2 0.2].

Визначити характеристики ефективного коду (середня довжина кодового слова в бітах n_{cp}, мінімально можлива середня довжина кодового слова $n_{cp.\min}$, ефективність коду).

Задача 5.3. Побудувати код Хафмена для ансамблю повідомлень { x_i } (i=1, …, 8) з ймовірностями

$$P_x = \left[\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{16}\,\frac{1}{16}\right].$$

Визначити характеристики коду.

5.3 Запитання для самоконтролю

1. У чому суть ефективного кодування?
2. Як визначається середня довжина коду?
3. Яка довжина коду дає найбільшу ефективність?
4. Опишіть алгоритм кодування Хафмена.

ЛІТЕРАТУРА

1. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов : Учебник для вузов / В.А. Игнатов. – М.: Сов. радио, 1979. — 280 с.
2. Кузьмин И.В. Основы теории информации и кодирования / И.В. Кузьмин, В.А. Кедрус. – К.: Вища школа, 1986. – 238 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей : Учебник для вузов / Е.С.Вентцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

4. Кавчук С.В. Сборник примеров и задач по теории информации / С.В. Кавчук. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. – 64 с.

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Функції від ймовірності *P*

P	$-log_2P$	$-P \cdot log_2P$	H	$-(1-P) \cdot log_2(1-P)$	$-log_2(1-P)$	$1-P$
0,01	6,643	0,066	0,081	0,014	0,014	0,99
0,02	5,644	0,113	0,141	0,028	0,029	0,98
0,03	5,059	0,152	0,194	0,042	0,044	0,97
0,04	4,644	0,186	0,242	0,056	0,059	0,96
0,05	4,322	0,216	0,286	0,070	0,074	0,95
0,06	4,059	0,243	0,327	0,084	0,089	0,94
0,07	3,936	0,268	0,366	0,097	0,105	0,93
0,08	3,644	0,291	0,402	0,111	0,120	0,92
0,09	3,474	0,313	0,436	0,124	0,136	0,91
0,10	3,322	0,332	0,469	0,137	0,152	0,90
0,11	3,184	0,350	0,499	0,150	0,168	0,89
0,12	3,059	0,367	0,529	0,162	0,184	0,88
0,13	2,943	0,383	0,557	0,175	0,201	0,87
0,14	2,836	0,397	0,584	0,187	0,217	0,86
0,15	2,737	0,411	0,610	0,199	0,234	0,85
0,16	2,644	0,423	0,634	0,211	0,252	0,84
0,17	2,556	0,434	0,658	0,223	0,269	0,83
0,18	2,474	0,445	0,680	0,235	0,286	0,82
0,19	2,396	0,455	0,701	0,246	0,304	0,81
0.20	2.322	0.464	0,722	0,257	0,322	0,80
0,21	2,252	0,473	0,741	0,269	0,340	0,79
0,22	2,184	0,481	0,760	0,279	0,358	0,78
0,23	2,120	0,488	0,778	0,290	0,377	0,77
0,24	2,059	0,494	0.795	0,301	0,396	0,76
0,25	2.000	0,500	0,811	0,311	0,415	0,75
0,26	1,943	0,505	0,827	0,321	0,434	0,74
0,27	1,889	0,510	0,841	0,331	0,454	0,73
0,28	1,836	0,514	0,855	0,341	0,474	0,72
0,29	1,786	0,518	0,869	0,351	0,494	0,71
0.30	1.737	0.521	0,881	0,360	0,514	0,70
0,31	1,690	0,524	0,893	0,369	0,535	0,69
0,32	1,644	0,526	0,904	0,378	0,556	0,68
0,33	1,599	0,528	0,915	0,387	0,578	0,67
0,34	1,556	0,529	0,925	0,39b	0.599	0,66
0,35	1,514	0,530	0,934	0,404	0,621	0,65
0,36	1,474	0,531	0,943	0,412	0,644	0,64
0,37	1,434	0.531	0,951	0,420	0,667	0,63
0,38	1,396	0,530	0,958	0,428	0,690	0,62
0,39	1,358	0,529	0,965	0,435	0,713	0,61
0.40	1.322	0.529	0,971	0,442	0,737	0,60

Продовження табл. А.1

P	$-log_2P$	$-P \cdot log_2P$	H	$-(1-P) \cdot log_2(1-P)$	$-log_2(1-P)$	$1-P$
0,41	1,286	0,527	0,976	0,449	0,761	0,59
0,42	1,252	0,526	0,981	0,455	0,786	0,58
0.43	1.217	0,523	0,986	0,462	0,811	0,57
0,44	1,184	0,521	0,989	0,468	0,836	0,56
0,45	1,152	0,518	0,993	0,474	0,862	0,55
0,46	1,120	0,515	0,905	0,480	0,889	0,54
0,47	1,089	0,512	0,997	0,485	0,916	0,53
0,48	1,059	0,508	0,999	0,491	0,943	0,52
0,49	1,029	0,504	0,999	0,495	0,971	0,51
0,50	1,000	0,500	1,000	0,500	1,000	0,50