МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАРВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСТЕТ»

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни «Математичні основи теорії систем»
за освітнім рівнем «Магістр» для студентів  спеціальності
«151  Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Затверджено на засіданні
кафедри комп'ютерно-інтегрованих
технологій та автоматизації.
Протокол № 7 від 15.06.2020 р.

Дніпро ДВНЗ «УДХТУ» 2020

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Математичні основи теорії систем» за освітнім рівнем «Магістр» для студентів спеціальності «151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Укл.: Корсун В.І. – Дніпро: ДВНЗ «УДХТУ», 2020. - 30 с.

Укладач: В.І. Корсун, д.т.н., професор

Відповідальний за випуск: О.П. Мисов, к.т.н., доцент

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Метою викладання навчальної дисципліни – навчання магістрантів сучасним методам і підходам до створення математичного апарату теорії систем, аналізу і синтезу алгоритмів функціонування різноманітних систем.

Основними завданнями вивчення дисципліни є надранная студентам теоретичних знань і практичних навичок розробки і вдосконалення систем управління технологічними об’єктами на основі досягнень прикладної математики.

# ПЛАН ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ

1. Знайомство студента з алгоритмом розв’язання завдань заняття.
2. Виконання студентом завдань практичного завдання згідно відповідного варіанту.
3. Захист виконаного завдання.

# ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

**Завдання 1**. ***Різницеві моделі систем***

Для розв’язання різницевого рівняння

$$\Delta^n y[kT] + a_1\Delta^{n-1}y[kT] + \cdots + a_{n-1}\Delta y[kT] + a_n y[kT] = 0, \tag{1.1}$$

$$y[0] = y_0, \qquad \Delta y[0] = y_1, \dots \ , \qquad \Delta^{n-1}y[0] = y_{n-1}$$

його необхідно записати через дискрети.

$$\Delta y[kT] = y[(k+1)T] - y[kT],$$
$$\Delta^2 y[kT] = \Delta y[(k+1)T] - \Delta y[kT] = y[(k+2)T] - 2y[(k+1)T] + y[kT],$$
$$\Delta^3 y[kT] = \Delta^2[(k+1)T] - \Delta^2[kT] =$$
$$=y[(k+3)T]-3y[(k+2)T]+3y[(k+1)T]-y[kT],$$
$$\dots$$

Підставивши значення кінцевих різниць, виражені через дискрети, у різницеве рівняння (1.1), отримаємо

$$y[(k+n)T] + b_1 y[(k+n-1)T] + \cdots + b_{n-1}y[(k+1)T] + b_n y[kT] = 0,$$

$$y[0]{=}y_0,\ \ y[T] = y_0 + y_1,\ \ y[2T] = y_0 + 2y_1 + y_2, \dots$$

Для розв'язання цього рівняння знайдемо корені характеристичного рівняння

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0\ .$$

Після знаходження коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ отримаємо

$$y[kT] = C_1\lambda_1^{kT} + C_2\lambda_2^{kT} + \cdots + C_n\lambda_n^{kT}, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{1.2}$$

Тут значення коефіцієнтів $C_i$ (i=1,2,…,n) знаходяться із початкових умов $y[0], y[T], \dots, y[(n-1)T]$.

**Приклад.** Необхідно розв'язати різницеве рівняння

$$\Delta^2 y[k] + 1{,}9\Delta y[k] - 0{,}42 y[k] = 0, \quad y[0] = 2,\ \ \Delta y[0] = -3. \tag{1.3}$$

*Розв'язання.*

Підставимо в рівняння (1.3) значення

$$\Delta y[k] = y[k+1] - y[k],$$
$$\Delta^2 y[k] = y[k+2] - 2y[k+1] + y[k].$$

Отримаємо:

$$y[k+2] - 2y[k+1] + y[k] + 1{,}9(y[k+1] - y[k]) - 0{,}42y[k] = 0,$$

$$y[0]=2, \quad y[1]= -1.$$

Спростивши цей вираз, будемо мати різницеве рівняння

$$y[k+2] - 0{,}1y[k+1] - 1{,}32y[k] = 0, \tag{1.4}$$
$$y[0]=2, \quad y[1]= -1.$$

Його характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 0{,}1\lambda - 1{,}32 = 0$$

матиме корені $\lambda_1 = 1{,}2$ та $\lambda_2 = -1{,}1$ .

Відповідно до (1.2) розв'язок рівняння (1.4), а значить і (13), запишемо у вигляді

$$y[k] = C_1\lambda_1^k + C_2\lambda_2^k = C_1 1{,}2^k + C_2(-1{,}1)^k.$$

Далі, використовуючи початкові умови

$$y[0] = C_1\lambda_1^0 + C_2\lambda_2^0 = C_1 + C_2 = 2,$$

$$y[1] = C_1\lambda_1^1 + C_2\lambda_2^1 = C_1 \cdot 1{,}2 + C_2.(-1{,}1) = -1,$$

знаходимо $C_1 = 0{,}5217$ та $C_2 = 1{,}4783$.

Таким чином,

$$y[k] = 0{,}5217 \cdot 1{,}2^k + 1{,}4783 \cdot (-1{,}1)^k.$$

При k=4 маємо

$$y[4] = 0{,}5217 \cdot 1{,}2^4 + 1{,}4783 \cdot (-1{,}1)^4 = \mathbf{3{,}2462}.$$

Той же результат отримаємо, скориставшись рекурентним

співвідношенням

$$y[k+2] = 0{,}1y[k+1] + 1{,}32y[k].$$

При k=0:

$$y[2] = 0{,}1y[1] + 1{,}32y[0] = 0{,}1 \cdot (-1) + 1{,}32 \cdot 2 = 2{,}54;$$

при k=1:

$$y[3] = 0{,}1y[2] + 1{,}32y[1] = 0{,}1 \cdot 2{,}54 + 1{,}32 \cdot (-1) = -1{,}066;$$

при k=2:

$$y[4] = 0{,}1y[3] + 1{,}32y[2] = 0{,}1 \cdot (-1{,}066) + 1{,}32 \cdot 2{,}54 = \mathbf{3{,}2462}.$$

***Завдання для самостійного виконання:***

Розв’язати різницеве рівняння

$$\Delta^2 y[k] + a_1\Delta y[k] + a_2 y[k] = 0, \quad y[0] = y_0, \ \ \Delta y[0] = y_1.$$

| № варіанта | $a_1$ | $a_2$ | $y_0$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,2 | 0,85 | 1 | 3 |
| 2 | 0,9 | 0,14 | -2 | 4 |
| 3 | 1,0 | 0,24 | -3 | 2 |
| 4 | 3,2 | 2,55 | -1 | 3 |
| 5 | 1,8 | 0,17 | 0 | -4 |
| 6 | 2,4 | 0,95 | 2 | -5 |
| 7 | 1,8 | 0,0 | 3 | 3 |
| 8 | 1,9 | 0,18 | 4 | 2 |
| 9 | 1,5 | -0,16 | -2,5 | 0,0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 2,0 | 0,36 | 1,5 | -2,5 |
| 11 | 3,5 | 3,04 | 5 | -3 |
| 12 | 0,4 | 0,03 | -3 | 4 |
| 13 | 1,5 | -0,34 | 2 | -5 |
| 14 | 1,4 | -0,51 | 3 | -4 |
| 15 | 2,6 | 1,33 | -4 | 3 |
| 16 | 2,9 | 2,1 | 1 | -4 |
| 17 | 2,4 | 1,08 | -1 | 5 |
| 18 | 0,1 | -0,06 | 0 | -6 |
| 19 | 1,5 | 0,14 | 4 | 5 |
| 20 | 2,0 | 0,51 | 2 | -3 |
| 21 | 1,5 | 0,26 | -2 | 5 |
| 22 | 1,9 | 0,84 | 3 | -4 |
| 23 | 1,1 | 0,24 | -4 | 3 |
| 24 | 1,8 | 0,0 | 5 | -3 |
| 25 | 1,8 | 0,17 | -6 | 2 |

**Завдання 2.** ***Фундаментальна матриця дискретної системи, її знаходження і обчислення змінних стану дискретної моделі.***

Розв'язок матричного різницевого рівняння

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}\mathbf{x}[kT] + \mathbf{B}\mathbf{u}[kT], \qquad \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0, \tag{2.1}$$

де

$$\mathbf{x}[kT] = \begin{bmatrix} x_1[kT] \\ x_2[kT] \\ \vdots \\ x_n[kT] \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}[kT] = \begin{bmatrix} u_1[kT] \\ u_2[kT] \\ \vdots \\ u_m[kT] \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix},$$

має вигляд:

$$\mathbf{x}[kT] = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i}\mathbf{B}\mathbf{u}[iT]. \tag{2.2}$$

Тут матриця $\mathbf{\Phi}[k]=\mathbf{A}^k$ називається фундаментальною матрицею дискретної моделі (2.1).

Для її знаходження використовуються дві ідеї.

***Ідея 1.*** Використання теореми Гамільтона-Келі, згідно з якою кожна квадратна матриця **A** задовольняє своєму характеристичному рівнянню:

$$P(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0.$$

Тобто

$$P(\mathbf{A})=\mathbf{0}\ .$$

***Приклад 1.***

Розглянемо вищесказане на прикладі матриці

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ 4 & -9\end{bmatrix}.$$

Характеристичне рівняння цієї матриці має вигляд:

$$\det(\lambda\mathbf{E}\text{-}\mathbf{A})=\lambda^2+7\lambda+10=0\ .$$

Далі підставимо в це рівняння матрицю **A** замість λ , одиничну матрицю **E** замість 1 і нульову матрицю **0** замість 0.

Отримаємо:

$$\mathbf{A}^2+7\mathbf{A}+10\mathbf{E}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ 4 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -7\\ 4 & -9\end{bmatrix}+7\begin{bmatrix}2 & -7\\ 4 & -9\end{bmatrix}+10\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}\ .$$

***Ідея 2.***

Якщо $N(\lambda)$ – деякий поліном ступеня вищого ніж розмір n матриці **A.** Тоді цей поліном можна записати у вигляді:

$$N(\lambda)=Q(\lambda)\cdot P(\lambda)+R(\lambda),$$

де P(λ) – характеристичний поліном матриці **A** (його ступінь дорівнює n); R(λ) – поліном ступеня не вищого ніж n-1, який є залишком від ділення полінома $N(\lambda)$ на $P(\lambda)$.

Оскільки $P(\lambda)=0$, то $N(\lambda)=R(\lambda)$ і $N(\mathbf{A})=R(\mathbf{A})$.

Якщо корені характеристичного рівняння $P(\lambda)=0$ різні, то для визначення полінома

$$R(\lambda)=a_0\lambda^{n-1}+a_1\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$$

скористаємося системою

$$N(\lambda_i)=R(\lambda_i),\quad i=\overline{1,n}\ ,$$

яка складається з n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих коефіцієнтів $a_i$ ($i=\overline{1,n}$ ).

***Приклад 2.***

Знайдемо фундаментальну матрицю **Ф**[k]=$\mathbf{A}^k$ лінійної дискретної системи, яка описується системою різницевих рівнянь

$$\begin{cases} x_1[(k+1)T] = x_2[kT], \\ x_2[(k+1)T] = -2x_1[kT] - 3x_2[kT]. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння матриці цієї системи має вигляд:

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Його кореням є $\lambda_1 = -2$ і $\lambda_2 = -1$.

Оскільки $\mathrm{N}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^\mathrm{k}$, то $\mathrm{N}(\lambda) = \lambda^\mathrm{k}$. І для визначення коефіцієнтів $\mathrm{a}_0$ і $\mathrm{a}_1$ полінома $\mathrm{R}(\lambda) = \mathrm{a}_0\lambda + \mathrm{a}_1$ маємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (-2)^\mathrm{k} = \mathrm{a}_0(-2) + \mathrm{a}_1, \\ (-1)^\mathrm{k} = \mathrm{a}_0(-1) + \mathrm{a}_1. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $\mathrm{a}_0 = (-1)^\mathrm{k} - (-2)^\mathrm{k}$, $\mathrm{a}_1 = 2(-1)^\mathrm{k} - (-2)^\mathrm{k}$.

Тепер знайдемо фундаментальну матрицю заданої системи різницевих рівнянь

$$\Phi[\mathrm{k}] = \mathbf{A}^\mathrm{k} = \mathrm{a}_0\mathbf{A} + \mathrm{a}_1\mathbf{E} =$$

$$= \left[(-1)^\mathrm{k} - (-2)^\mathrm{k}\right]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \left[2(-1)^\mathrm{k} - (-2)^\mathrm{k}\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2(-1)^\mathrm{k} - (-2)^\mathrm{k} & (-1)^\mathrm{k} - (-2)^\mathrm{k} \\ -2(-1)^\mathrm{k} + 2(-2)^\mathrm{k} & -(-1)^\mathrm{k} + 2(-2)^\mathrm{k} \end{bmatrix}.$$

Перевірка:

$$\Phi[0] = \begin{bmatrix} 2(-1)^0 - (-2)^0 & (-1)^0 - (-2)^0 \\ -2(-1)^0 + 2(-2)^0 & -(-1)^0 + 2(-2)^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

У тому випадку, коли корені характеристичного рівняння є кратними, для визначення коефіцієнтів поліному $\mathrm{R}(\lambda)$ використовується система рівнянь:

$$(\mathrm{d}^\mathrm{m}(\mathrm{N}(\lambda))/\mathrm{d}\lambda^\mathrm{m})_{|\lambda=\lambda_\mathrm{i}} = (\mathrm{d}^\mathrm{m}(\mathrm{R}(\lambda))/\mathrm{d}\lambda^\mathrm{m})_{|\lambda=\lambda_\mathrm{i}},$$
$$\mathrm{m} = \overline{0, \mathrm{n}-1}, \quad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{s}},$$

де $\lambda_\mathrm{i}$ –корені характеристичного рівняння.

***Використання фундаментальної матриці для отримання розв'язку різницевого рівняння.***

Знайдемо розв'язок різницевого рівняння

$$y[k+2] - 0{,}1y[k+1] - 1{,}32y[k] = 0,$$
$$y[0]=2, \quad y[1]= -1.$$

Представимо записане вище різницеве рівняння у вигляді моделі в змінних стану. Для цього введемо додаткові змінні $x_1[k] = y[k]$, $x_2[k] = y[k+1]$.

Збільшивши значення аргументів введених змінних, отримаємо:

$$x_1[k+1] = y[k+1], \qquad x_2[k+1] = y[k+2]\,.$$

Підставивши в останні вирази значення

$$y[k+1] = x_2[k]$$

і отримане з різницевого рівняння значення

$$y[k+2] = 0{,}1y[k+1] + 1{,}32y[k] = 1{,}32x_1[k] + 0{,}1x_2[k].$$

Будемо мати систему:

$$\begin{cases} x_1[k+1] = x_2[k], & x_1[0] = y[0] = 2, \\ x_2[k+1] = 1{,}32x_1[k] + 0{,}1x_2[k], & x_2[0] = y[1] = -1, \end{cases}$$
$$y[k] = x_1[k].$$

Її матриця має вигляд

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1{,}32 & 0{,}1 \end{bmatrix}.$$

Для цієї матриці, знаходимо

$$\Phi[k] = \mathbf{A}^k = a_0\mathbf{A} + a_1\mathbf{E}\,.$$

Використовуючи власні числа матриці **A,** обчислимо коефіцієнти $a_0$ та $a_1$:

$$\begin{cases} 1{,}2^k = a_0 \cdot 1{,}2 + a_1, \\ (-1{,}1)^k = a_0(-1{,}1) + a_1. \end{cases}$$

Тут $\lambda_1 = 1{,}2$ і $\lambda_2 = -1{,}1$ – корені характеристичного рівняння

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - 0{,}1\lambda - 1{,}32 = 0$$

матриці **A.**

Розв'яжемо записану вище систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Отримаємо

$$a_0 = \frac{1{,}2^k - (-1{,}1)^k}{2{,}3}, \quad a_1 = \frac{1{,}1 \cdot 1{,}2^k + 1{,}2 \cdot (-1{,}1)^k}{2{,}3}\,.$$

Далі обчислимо

$$\Phi[k] = \mathbf{A}^k = a_0\mathbf{A} + a_1\mathbf{E} =$$

$$= \frac{1{,}2^k - (-1{,}1)^k}{2{,}3} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1{,}32 & 0{,}1 \end{bmatrix} + \frac{1{,}1 \cdot 1{,}2^k + 1{,}2 \cdot (-1{,}1)^k}{2{,}3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1{,}1 \cdot 1{,}2^k + 1{,}2 \cdot (-1{,}1)^k}{2{,}3} & \frac{1{,}2^k - (-1{,}1)^k}{2{,}3} \\ \frac{1{,}32 \cdot [1{,}2^k - (-1{,}1)^k]}{2{,}3} & \frac{1{,}2 \cdot 1{,}2^k + 1{,}1 \cdot (-1{,}1)^k}{2{,}3} \end{bmatrix}.$$

Тепер розрахуємо вектор змінних стану

$$\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1{,}1 \cdot 1{,}2^k + 1{,}2 \cdot (-1{,}1)^k}{2{,}3} & \frac{1{,}2^k - (-1{,}1)^k}{2{,}3} \\ \frac{1{,}32 \cdot [1{,}2^k - (-1{,}1)^k]}{2{,}3} & \frac{1{,}2 \cdot 1{,}2^k + 1{,}1 \cdot (-1{,}1)^k}{2{,}3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1{,}2 \cdot 1{,}2^k + 3{,}4 \cdot (-1{,}1)^k}{2{,}3} \\ \frac{1{,}44 \cdot 1{,}2^k - 3{,}74 \cdot (-1{,}1)^k}{2{,}3} \end{bmatrix}.$$

Таким чином,

$$y[k] = x_1[k] = \frac{1{,}2 \cdot 1{,}2^k + 3{,}4 \cdot (-1{,}1)^k}{2{,}3} = 0{,}5217 \cdot 1{,}2^k + 1{,}4783 \cdot (-1{,}1)^k.$$

Останнє співпадає з результатами, які були отримані при виконанні прикладу практичного заняття **«Різницеві моделі систем»**.

***Завдання для самостійного виконання:***

1. Рівняння в дискретах, що було отримане Вами у результаті перетворення різницевого рівняння, заданого у відповідному варіанті матеріалу **«Різницеві моделі систем»**, записати у вигляді моделі в змінних стану.
2. Знайти фундаментальну матрицю цієї дискретної моделі і її змінні стану.
3. Знайти значення $y[k]$ і порівняти його з результатами виконання завдання **«Різницеві моделі систем»** .

**Завдання 3.** ***Канонічні керуюче та ідентифікаційне представлення одновимірних дискретних моделей в змінних стану.***

**Теоретичний матеріал**

В загальному випадку дискретна модель в змінних стану

$$\Delta \mathrm{x}[\mathrm{kT}] = \mathrm{Ax}[\mathrm{kt}] + \mathrm{Bu}[\mathrm{kT}], \quad \mathrm{x}[0] = \mathrm{x}_0, \qquad (3.1)$$
$$\mathrm{y}[\mathrm{kT}] = \mathrm{Cx}[\mathrm{kT}] + \mathrm{Du}[\mathrm{kT}]$$

за допомогою підстановки $\Delta \mathrm{x}[\mathrm{kT}] = \mathrm{x}[(\mathrm{k}+1)\mathrm{T}] - \mathrm{x}[\mathrm{kT}]$ може бути записана через дискрети у такий спосіб:Место для формулы.

$$\mathrm{x}[(\mathrm{k}+1)\mathrm{T}] = \bar{\bar{\mathrm{A}}}\mathrm{x}[\mathrm{kT}] + \mathrm{Bu}[\mathrm{kT}], \quad \mathrm{x}[0] = \mathrm{x}_0, \qquad (3.2)$$
$$\mathrm{y}[\mathrm{kT}] = \mathrm{Cx}[\mathrm{kT}] + \mathrm{Du}[\mathrm{kT}],$$

де $\bar{\bar{\mathrm{A}}} = \mathrm{A} + \mathrm{E}$.

В свою чергу модель (1.2) за допомогою перетворення $\mathrm{x}[\mathrm{kT}] = \mathrm{Pz}[\mathrm{kT}]$ з невиродженою матрицею P $(\det(P) \neq 0)$ записується у вигляді:

$$\mathrm{z}[(\mathrm{k}+1)\mathrm{T}] = \hat{\mathrm{A}}\mathrm{z}[\mathrm{kT}] + \hat{\mathrm{B}}\mathrm{u}[\mathrm{kT}], \quad \mathrm{z}[0] = \mathrm{z}_0, \qquad (3.3)$$
$$\mathrm{y}[\mathrm{kT}] = \hat{\mathrm{C}}\mathrm{z}[\mathrm{kT}] + \hat{\mathrm{D}}\mathrm{u}[\mathrm{kT}],$$

де

$$\hat{\mathrm{A}} = \mathrm{P}^{-1}\bar{\bar{\mathrm{A}}}\mathrm{P}, \quad \hat{\mathrm{B}} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}, \quad \hat{\mathrm{C}} = \mathrm{CP}, \quad \hat{\mathrm{D}} = \mathrm{D}, \quad \mathrm{z}_0 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{x}_0.$$

Для одновимірних об’єктів керування, коли C є вектором-рядком, а B – вектором-стовпцем, фахівцями з теорії управління синтезовані канонічне керуюче та канонічне ідентифікаційне представлення. Ці представлення одновимірних моделей в змінних стану виявились найбільш зручними при побудові систем модального управління та систем спостереження.

Для одновимірних моделей в змінних стану (3.2) з матрицями

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n], \quad \mathrm{D} = [d] \qquad (3.4)$$

*канонічне керуюче представлення матриць* $\hat{\mathrm{A}}$ та $\hat{\mathrm{B}}$ у (1.3) має вигляд:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \cdots & -\alpha_n \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (3.5)$$

де $\alpha_i$ - коефіцієнти характеристичного рівняння

$$\det(\lambda E - \bar{\bar{A}}) = \lambda^n + \alpha_n\lambda^{n-1} + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_2\lambda + \alpha_1 = 0 \qquad (3.6)$$

матриці $\bar{\bar{A}}$.

Вектор $\hat{C}$ знаходиться за допомогою матриці $P = G\hat{G}^{-1}$,

де

$$G = [B \ \vdots \ \bar{\bar{A}}B \ \vdots \ \bar{\bar{A}}^2B \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ \bar{\bar{A}}^{n-1}B],$$

$$\hat{G} = [\hat{B} \ \vdots \ \hat{A}\hat{B} \ \vdots \ \hat{A}^2\hat{B} \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}].$$

Тобто:

$$\hat{C} = CG\hat{G}^{-1}. \qquad (3.7)$$

Що ж стосується *канонічного ідентифікаційного представлення матриць* $\hat{A}_i$, $\hat{C}_i$ та $\hat{B}_i$ (3.3), то вони через дуальність властивостей керованості *(індекс внизу - **к**)* і спостережуваності *(індекс внизу – **i**)* розраховуються за формулами:

$$\hat{A}_i = \hat{A}_k^T, \quad \hat{B}_i = \hat{C}_k^T, \quad \hat{C}_i = \hat{B}_k^T. \qquad (3.8)$$

Матриці $\hat{A}_k$, $\hat{B}_k$, $\hat{C}_k$ обчислюються за формулами (3.5), (3.6) та (3.7).

### 1.1. Приклади розв’язування задач.

***Приклад 1.*** Для одновимірної моделі (1.1) з матрицями

$$A=\begin{bmatrix}-0.8 & 0.1 & 0.1\\ -0.1 & -0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0.2 & -1.0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.3\\ -0.1\end{bmatrix},\ C=[0.2 \quad 0.1 \quad -0.3],\ D=[0.2]$$

побудуємо канонічне керуюче представлення.

Знайдемо матрицю $\bar{\bar{A}} = A + E$:

$$\bar{\bar{A}} = \begin{vmatrix}-0.8+1 & 0.1+0 & 0.1+0\\ -0.1+0 & -0.9+1 & 0.2+0\\ 0.1+0 & 0.2+0 & -1.0+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0.2 & 0.1 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.2 & 0\end{vmatrix}.$$

Для цього знайдемо характеристичний поліном матриці $\bar{\bar{A}}$:

$$\det(\lambda E - \bar{\bar{A}}) = \begin{vmatrix}\lambda - 0.2 & -0.1 & -0.1\\ 0.1 & \lambda - 0.1 & -0.2\\ -0.1 & -0.2 & \lambda\end{vmatrix} =$$

$$=(\lambda - 0.2)(\lambda - 0.1)\lambda + (-0.1)(-0.2)(-0.1) + (-0.1)0.1(-0.2) -$$

$$-(-0.1)(\lambda - 0.1)(-0.1) - 0.1(-0.1)\lambda - (-0.2)(-0.2)(\lambda - 0.2) =$$

$$=\lambda^3 - 0.3\lambda^2 + 0.02\lambda - 0.002 + 0.002 - 0.01\lambda + 0.001 + 0.01\lambda -$$

$$-0.04\lambda + 0.008 = \lambda^3 - 0.3\lambda^2 - 0.02\lambda + 0.009 = 0.$$

З отриманого виразу маємо: $\alpha_1 = 0.009$, $\alpha_2 = -0.02$, $\alpha_3 = -0.3$.

Знаючи коефіцієнти характеристичного рівняння матриці $\bar{\bar{\mathrm{A}}}$, згідно з (3.5) запишемо канонічне представлення матриць:

$$\hat{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.009 & 0.02 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицю $\hat{\mathrm{C}}$ знайдемо за формулою (3.7). Для цього розрахуємо матриці G і $\hat{\mathrm{G}}$ :

$$\mathrm{G}=[\mathrm{B} \;\vdots\; \bar{\bar{\mathrm{A}}}\mathrm{B} \;\vdots\; \bar{\bar{\mathrm{A}}}^2\mathrm{B}] ,$$

$$\hat{\mathrm{G}}=\left[\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k} \;\vdots\; \hat{\mathrm{A}}_\mathrm{k}\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k} \;\vdots\; \hat{\mathrm{A}}_\mathrm{k}^2\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}\right] .$$

Тут

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\mathrm{A}}}\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.0 \\ 0.07 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\bar{\mathrm{A}}}^2\mathrm{B} = \bar{\bar{\mathrm{A}}}\left(\bar{\bar{\mathrm{A}}}\mathrm{B}\right) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.0 \\ 0.07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015 \\ 0.010 \\ 0.004 \end{bmatrix}.$$

$$\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathrm{A}}_\mathrm{k}\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.009 & 0.02 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathrm{A}}_\mathrm{k}^2\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k} = \hat{\mathrm{A}}_\mathrm{k}\left(\hat{\mathrm{A}}_\mathrm{k}\hat{\mathrm{B}}_\mathrm{k}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.009 & 0.02 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3 \\ 0.11 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$\mathrm{G} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.04 & 0.015 \\ 0.3 & 0.0 & 0.010 \\ -0.1 & 0.07 & 0.004 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.3 \\ 1 & 0.3 & 0.11 \end{bmatrix}.$$

Тепер знайдемо обернену матрицю $\hat{\mathrm{G}}^{-1}$, використовуючи довідковий матеріал.

***Довідковий матеріал:***

Знаходження оберненої матриці до матриці

$$\mathrm{S}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця знаходиться за наступним алгоритмом:

$$\mathrm{S}^{-1}=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \Big/ \det(S),$$

де $S_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ обчислюються за формулами:

$$S_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}=s_{22}s_{33}-s_{32}s_{23}, \quad S_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} s_{21} & s_{23} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix},$$

$$S_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}, \quad S_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix},$$

$$S_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{31} & s_{33} \end{vmatrix}, \quad S_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix},$$

$$S_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{22} & s_{23} \end{vmatrix}, \quad S_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{21} & s_{23} \end{vmatrix},$$

$$S_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix},$$

а визначник $\det(S)$ - за формулою:

$$\det(S)=s_{11}s_{22}s_{33}+s_{31}s_{12}s_{23}+s_{13}s_{21}s_{32}-$$

$$-s_{31}s_{22}s_{13}-s_{11}s_{32}s_{23}-s_{33}s_{21}s_{12}.$$

$$\widehat{G}^{-1}=\begin{bmatrix} \widehat{G}_{11} & \widehat{G}_{21} & \widehat{G}_{31} \\ \widehat{G}_{12} & \widehat{G}_{22} & \widehat{G}_{32} \\ \widehat{G}_{13} & \widehat{G}_{23} & \widehat{G}_{33} \end{bmatrix} \Big/ \det(\widehat{G})=\begin{bmatrix} -0.02 & -0.3 & 1 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далі за формулою (3.7) знаходимо

$$\widehat{C}_{к}=[0.2 \quad 0.1 \quad -0.3]\begin{bmatrix} 0.1 & 0.04 & 0.015 \\ 0.3 & 0.0 & 0.010 \\ -0.1 & 0.07 & 0.004 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.02 & -0.3 & 1 \\ -0.3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}=$$

$$=[0.0051 \quad -0.0370 \quad 0.0800].$$

Використовуючи (3.8), знаходимо *канонічне ідентифікаційне представлення матриць*:

$$\widehat{\mathrm{A}}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.009 \\ 1 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 0.3 \end{bmatrix},\ \widehat{\mathrm{B}}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} 0.0051 \\ -0.0370 \\ 0.0800 \end{bmatrix},\ \widehat{\mathrm{C}}_{\mathrm{i}} = [0 \quad 0 \quad 1]\,.$$

У свою чергу, $\widehat{\mathrm{D}}_{\mathrm{k}} = \widehat{\mathrm{D}}_{\mathrm{i}} = \mathrm{D} = [0.2]$.

## 1.2. Завдання для самостійного виконання.

Для моделей з наведеними нижче матрицями A, B, C та D побудувати *канонічні керуюче та ідентифікаційне представлення.*

| № вар | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | d |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | -0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.0 | 0.3 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.3 | 0.4 | -0.1 | 0.4 |
| 2 | -0.1 | 0.1 | -0.1 | 0.4 | 0.4 | 0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | -0.2 | 0.2 | -0.1 | -0.2 | 0.3 |
| 3 | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | -0.2 | 0.5 | -0.2 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |
| 4 | 0.3 | 0.2 | -0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.1 | -0.1 | 0.0 | -0.2 | 0.1 | -0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.3 |
| 5 | 0.5 | 0.2 | 0.5 | -0.2 | -0.1 | -0.8 | 0.2 | -0.3 | -0.2 | 0.3 | 0.1 | -0.5 | 0.2 | -0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 6 | 0.6 | 0.3 | 0.8 | 0.3 | 0.2 | 0.3 | -0.1 | 0.0 | -0.4 | 0.2 | -0.1 | 0.3 | 0.1 | 0.3 | -0.1 | 0.2 |
| 7 | 0.1 | 0.4 | 0.1 | -0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.1 | 0.2 | -0.1 | 0.4 | -0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.5 | -0.3 | 0.4 |
| 8 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.7 | -0.1 | 0.5 | 0.2 | 0.3 | -0.3 | 0.5 | 0.6 | -0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | -0.2 |
| 9 | 0.1 | -0.1 | -0.1 | 0.0 | 0.6 | 0.2 | -0.6 | -0.3 | -0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | -0.4 |
| 10 | 0.1 | 0.1 | -0.4 | 0.3 | -0.3 | 0.2 | -0.5 | 0.1 | 0.4 | 0.3 | -0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.6 |
| 11 | 0.2 | 0.5 | -0.6 | 0.4 | 0.3 | -0.1 | -0.1 | 0.2 | -0.2 | 0.5 | 0.8 | -0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | -0.4 |
| 12 | -0.5 | -0.1 | 0.6 | -0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | -0.3 | -0.4 | -0.1 | 0.4 |
| 13 | -0.1 | 0.1 | -0.1 | -0.4 | 0.4 | 0.2 | 0.1 | 0.2 | -0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.2 | 0.2 | -0.1 | -0.2 | 0.3 |
| 14 | -0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | -0.2 | 0.5 | -0.2 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |
| 15 | 0.3 | -0.2 | -0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.1 | -0.1 | 0.0 | -0.2 | 0.1 | -0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.3 |
| 16 | -0.5 | 0.2 | 0.5 | -0.2 | -0.1 | -0.8 | 0.2 | -0.3 | -0.2 | 0.3 | 0.1 | -0.5 | 0.2 | -0.3 | 0.4 | 0.5 |
| 17 | 0.6 | -0.3 | -0.8 | 0.3 | 0.2 | 0.3 | -0.1 | 0.7 | -0.4 | -0.2 | -0.1 | 0.3 | 0.1 | 0.3 | -0.1 | 0.2 |
| 18 | 0.1 | 0.4 | -0.1 | -0.1 | 0.8 | 0.9 | 0.1 | -0.6 | -0.1 | 0.4 | -0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.9 | -0.3 | 0.4 |
| 19 | -0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.3 | -0.1 | 0.5 | 0.2 | 0.1 | -0.3 | 0.6 | 0.3 | -0.2 | 0.1 | -0.2 | 0.4 | -0.2 |
| 20 | -0.4 | -0.1 | -0.1 | -0.9 | 0.6 | 0.2 | -0.6 | -0.3 | -0.2 | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.5 | 0.1 | 0.2 | -0.4 |
| 21 | 0.3 | 0.1 | -0.4 | 0.7 | -0.3 | 0.2 | -0.5 | 0.1 | 0.4 | 0.3 | -0.1 | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.6 |
| 22 | 0.2 | -0.5 | -0.8 | 0.4 | 0.7 | -0.1 | 0.1 | -0.6 | -0.2 | 0.5 | 0.8 | -0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | -0.4 |
| 23 | 0.2 | 0.1 | -0.1 | -0.2 | 0.3 | 0.6 | 0.1 | 0.2 | -0.3 | 0.7 | 0.6 | -0.4 | 0.2 | -0.8 | -0.1 | 0.5 |
| 24 | 0.0 | -0.3 | 0.5 | 0.6 | 0.3 | -0.4 | 0.2 | 0.1 | 0.0 | -0.7 | 0.3 | -0.2 | 0.9 | 0.6 | -0.4 | 0.7 |
| 25 | -0.9 | 0.1 | 0.2 | -0.1 | 0.2 | -0.3 | 0.5 | 0.1 | -0.2 | 0.6 | 0.8 | 0.7 | -0.5 | 0.4 | -0.4 | 0.5 |

**Завдання 4.** ***Моделі в змінних стану об'єктів з запізненням на вході***

***Об'єкт без запізнення.***

$$x[k+2] - 0{,}5x[k+1] + 0{,}84x[k] = u[k], \;\; x[0] = 0, \;\; x[1] = 0. \qquad (4.1)$$

Введемо в дію додаткові змінні

$$x_1[k] = x[k],$$
$$x_2[k] = x[k+1].$$

В цих виразах збільшимо аргумент на 1:

$$x_1[k+1] = x[k+1],$$
$$x_2[k+1] = x[k+2].$$

На основі цих позначень різницеве рівняння (4.1) представимо наступним чином:

$$\begin{cases} x_1[k+1] = x_2[k], & x_1[0] = 0, \\ x_2[k+1] = -0{,}84x_1[k] + 0{,}5x_2[k] + u[k], & x_2[0] = 0, \end{cases} \qquad (4.2)$$
$$x[k] = x_1[k].$$

Нехай $u[k] = 1$ для k=0, 1, 2,… .
Тоді маємо при k=0:

$$\begin{cases} x_1[1] = x_2[0] = 0, \\ x_2[1] = -0{,}84x_1[0] + 0{,}5x_2[0] + u[0] = 1, \end{cases} \qquad (4.3)$$
$$x[0] = x_1[0] = 0;$$

при k=1:

$$\begin{cases} x_1[2] = x_2[1] = 1, \\ x_2[2] = -0{,}84x_1[1] + 0{,}5x_2[1] + u[1] = 1{,}5\,, \end{cases} \qquad (4.4)$$
$$x[1] = x_1[1] = 0.$$

при k=2:

$$\begin{cases} x_1[3] = x_2[2] = 1{,}5\,, \\ x_2[3] = -0{,}84x_1[2] + 0{,}5x_2[2] + u[2] = 0{,}91\,, \end{cases} \qquad (4.5)$$
$$x[2] = x_1[2] = 1.$$

Тут значення змінних стану, які були отримані на попередньому кроці, підставляються у праві частини наступних виразів.

***Об'єкт з запізненням на вході.***

$$x[k+2] - 0{,}5x[k+1] + 0{,}84x[k] = u[k-3], \;\; x[0] = 0, \;\; x[1] = 0. \quad (4.6)$$

Виконаємо операції такі ж, які виконувалися при перетворенні рівняння (4.1). Отримаємо:

$$\begin{cases} x_1[k+1] = x_2[k], & x_1[0] = 0, \\ x_2[k+1] = -0{,}84x_1[k] + 0{,}5x_2[k] + u[k-3], & x_2[0] = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$
$$x[k] = x_1[k].$$

Далі введемо до розгляду змінні:

$$x_3[k] = u[k-3], \;\; x_4[k] = u[k-2], \;\; x_5[k] = u[k-1].$$

В обох частинах цих виразів збільшимо аргумент на 1. Після цього отримаємо:

$$x_3[k+1] = u[k-2], \;\; x_4[k+1] = u[k-1], \;\; x_5[k+1] = u[k].$$

На основі введених змінних і їх перетворень скорегуємо систему рівнянь (4.7):

$$\begin{cases} x_1[k+1] = x_2[k], & x_1[0] = 0, \\ x_2[k+1] = -0{,}84x_1[k] + 0{,}5x_2[k] + x_3[k], & x_2[0] = 0, \\ x_3[k+1] = x_4[k], & x_3[0] = 0, \\ x_4[k+1] = x_5[k], & x_4[0] = 0, \\ x_5[k+1] = u[k], & x_5[0] = 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$x[k] = x_1[k].$$

Тут також $u[k] = 1$ для k=0, 1, 2,…

Проаналізуємо поведінку моделі (4.8) при різних значеннях k.
Тоді маємо

при k=0:

$$\begin{cases} x_1[1] = x_2[0] = 0, \\ x_2[1] = -0{,}84x_1[0] + 0{,}5x_2[0] + x_3[0] = 0, \\ x_3[1] = x_4[0] = 0, \\ x_4[1] = x_5[0] = 0, \\ x_5[1] = u[0] = 1, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$x[0] = x_1[0] = 0;$$

при k=1:

$$\begin{cases} x_1[2] = x_2[1] = 0, \\ x_2[2] = -0{,}84x_1[1] + 0{,}5x_2[1] + x_3[1] = 0, \\ x_3[2] = x_4[1] = 0, \\ x_4[2] = x_5[1] = 1, \\ x_5[2] = u[1] = 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

$$x[1] = x_1[1] = 0;$$

при k=2:

$$\begin{cases} x_1[3] = x_2[2] = 0, \\ x_2[3] = -0{,}84x_1[2] + 0{,}5x_2[2] + x_3[2] = 0, \\ x_3[3] = x_4[2] = 1, \\ x_4[3] = x_5[2] = 1, \\ x_5[3] = u[2] = 1, \end{cases} \tag{4.11}$$

$$x[2] = x_1[2] = 0;$$

при k=3:

$$\begin{cases} x_1[4] = x_2[3] = 0, \\ x_2[4] = -0{,}84x_1[3] + 0{,}5x_2[3] + x_3[3] = 1, \\ x_3[4] = x_4[3] = 1, \\ x_4[4] = x_5[3] = 1, \\ x_5[4] = u[3] = 1, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$x[3] = x_1[3] = 0;$$

при k=4:

$$\begin{cases} x_1[5] = x_2[4] = 1, \\ x_2[5] = -0{,}84x_1[4] + 0{,}5x_2[4] + x_3[4] = 1{,}5\ , \\ x_3[5] = x_4[4] = 1, \\ x_4[5] = x_5[4] = 1, \\ x_5[5] = u[4] = 1, \end{cases} \tag{4.13}$$

$$x[4] = x_1[4] = 0;$$

при k=5:

$$\begin{cases} x_1[6] = x_2[5] = 1{,}5\ , \\ x_2[6] = -0{,}84x_1[5] + 0{,}5x_2[5] + x_3[5] = 0{,}91\ , \\ x_3[6] = x_4[5] = 1, \\ x_4[6] = x_5[5] = 1, \\ x_5[6] = u[5] = 1, \end{cases} \tag{4.14}$$

$$x[5] = x_1[5] = 1;$$

Моделі (4.2) і (4.8) можуть бути представлені у матричній формі

$$\boldsymbol{x}[k+1] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{B}u[k], \qquad x[0] = \boldsymbol{0},$$

де

$$\boldsymbol{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}84 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

для моделі (4.2) і

$$\boldsymbol{x}[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \\ x_4[k] \\ x_5[k] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}84 & 0{,}5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

для моделі (4.8).

Із виразів (4.5) та (4.14) видно, що у випадку об’єкта без запізнення вихідна величина $x[k]$ приймає значення, яке дорівнює 1 при $k = 2$, а у випадку об’єкта з запізненням лише при $k = 5$.

***Завдання для самостійного виконання.***

Для різницевих рівнянь

$$x[k+2] + a_1 x[k+1] + a_2 x[k] = u[k], \;\; x[0] = 0, \;\; x[1] = 0$$

та

$$x[k+2] + a_1 x[k+1] + a_2 x[k] = u[k-d], \;\; x[0] = 0, \;\; x[1] = 0$$

1) побудувати моделі в змінних стану;
2) розглянути проходження вхідного сигналу $u[k] = 1$ (k=0, 1, 2,…) через обидві системи (без запізнення і з запізненням).

| Варіант № | $a_1$ | $a_2$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -1,2 | 0,35 | 3 |
| 2 | -1,0 | 0,24 | 2 |
| 3 | -1,0 | 0,21 | 3 |
| 4 | -1,2 | 0,32 | 3 |
| 5 | -0,2 | -0,15 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 0,7 | 0,12 | 2 |
| 7 | 0,2 | -0,15 | 2 |
| 8 | 0,6 | -0,16 | 4 |
| 9 | -1,6 | 0,63 | 3 |
| 10 | 0,1 | -0,72 | 3 |
| 11 | 0,3 | -0,4 | 4 |
| 12 | 0,3 | -0,54 | 2 |
| 13 | 0,1 | -0,72 | 3 |
| 14 | -1,3 | 0,36 | 2 |
| 15 | -0,7 | -0,08 | 3 |
| 16 | -1,4 | 0,33 | 3 |
| 17 | -1,7 | 0,06 | 4 |
| 18 | 0,8 | -0,48 | 2 |
| 19 | 0,4 | -0,6 | 3 |
| 20 | -0,3 | -0,54 | 2 |
| 21 | 0,3 | -0,4 | 3 |
| 22 | -1,6 | 0,63 | 4 |
| 23 | 0,1 | -0,72 | 4 |
| 25 | 0,2 | -0,15 | 4 |
| 25 | 0,4 | -0,6 | 2 |

**Завдання 5.** ***Псевдообернена матриця і її використання.***

В результаті проведення експериментів досить часто отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь, в якій кількість (n) невідомих змінних менше кількості (m) рівнянь (перевизначену СЛАР):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Розв’язання цієї СЛАР здійснюється за допомогою псевдооберненої матриці $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathrm{T}$ :

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^+\mathbf{b} ,$$

де

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{bmatrix}.$$

***Приклад розв'язання:***

Знайдемо розв'язок СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7, \\ -2x_1 + x_2 = -2, \\ x_1 - 3x_2 = -3. \end{cases}$$

Для цього запишемо:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Далі виконаємо розрахунки:

$$\boldsymbol{A}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 11 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}22 & 0{,}08 \\ 0{,}08 & 0{,}12 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{A})^{-1}\boldsymbol{A}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}36 & -0{,}02 \\ 0{,}2 & -0{,}04 & -0{,}28 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & -0{,}36 & -0{,}02 \\ 0{,}2 & -0{,}04 & -0{,}28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}88 \\ 2{,}32 \end{bmatrix}.$$

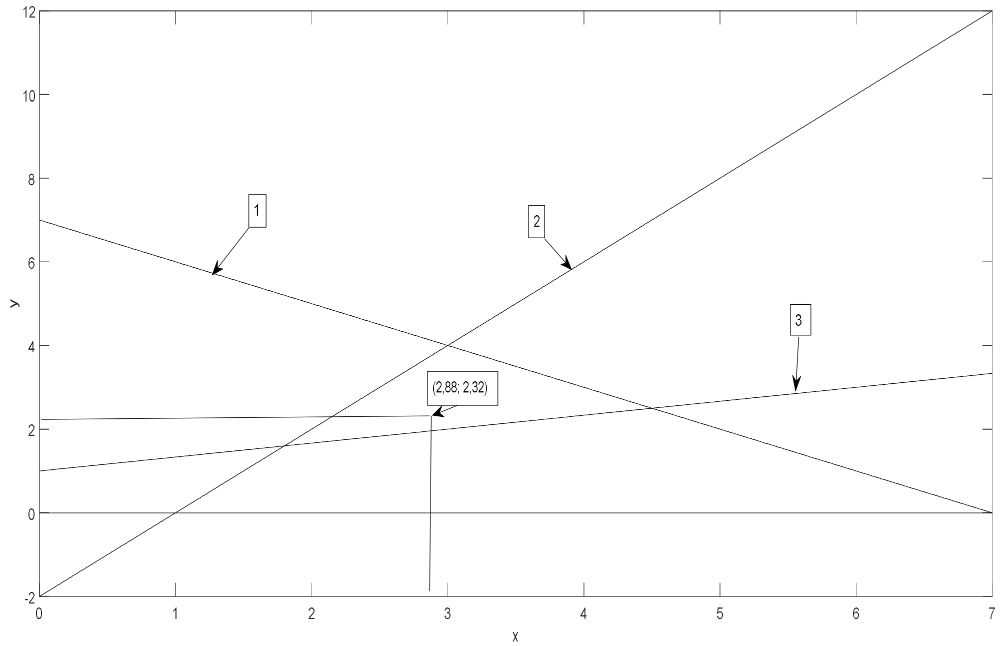


Рис.1. Геометрична інтерпретація розв’язку перевизначеної СЛАР, розглянутої у прикладі.

***Завдання для самостійного виконання:***

1. Побудувати графіки рівнянь СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_{2,} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3, \end{cases}$$

   які вказані для відповідного варіанту (2-х СЛАР).

2. За допомогою використання математичного апарату обчислення псевдооберненої матриці розв’язати задані в завданні СЛАР.
3. Розмістити на площинах з зображенням графіків рівнянь СЛАР координати знайдених розв’язків СЛАР.

| № вар. | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $b_1$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $b_2$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 7 | 21 | 1 | 1 | 5 | 7 | 3 | 21 |
| | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 5 | 7 | 3 | 21 |
| 2 | 7 | 3 | 21 | 1 | 1 | 5 | 2 | 3 | 12 |
| | 3 | 7 | 21 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 4 |
| 3 | 2 | 3 | 12 | 3 | 2 | 12 | 3 | -1 | 0 |
| | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 6 | 1 | -2 | 0 |
| 4 | 2 | 5 | 10 | 2 | 5 | 15 | 1 | -4 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | 10 | 5 | 2 | 10 | 1 | 1 | 4 |
| 5 | 3 | 5 | 15 | 3 | 1 | 6 | 1 | -1 | 0 |
| | 3 | 1 | 6 | 3 | 1 | 9 | 1 | -2 | 0 |
| 6 | 1 | 3 | 6 | 5 | 3 | 15 | -1 | 1 | 0 |
| | 2 | 1 | 6 | 2 | 1 | 4 | 2 | -1 | 0 |
| 7 | 4 | 3 | 12 | 1 | 3 | 6 | 1 | -1 | -1 |
| | 4 | 3 | 12 | 4 | 3 | 15 | 1 | -1 | -2 |
| 8 | -1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 6 | 3 | 4 | 12 |
| | 1 | 3 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 | -1 | 1 |
| 9 | 1 | 3 | 6 | -1 | 1 | 0 | 1 | 3 | 15 |
| | 1 | 3 | 9 | 3 | 1 | 9 | 2 | -1 | 0 |
| 10 | 3 | 2 | 12 | 1 | 1 | 5 | 3 | 7 | 21 |
| | 2 | 1 | 6 | 2 | 1 | 4 | -1 | 2 | 0 |
| 11 | 2 | 3 | 6 | 3 | 2 | 6 | 1 | -3 | 0 |
| | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 6 | 1 | -2 | 0 |
| 12 | 5 | 2 | 15 | 5 | 2 | 10 | 1 | -3 | 0 |
| | 1 | 3 | 9 | 3 | 1 | 7 | -1 | 2 | 0 |
| 13 | 3 | 1 | 6 | -1 | 1 | -1 | 3 | 4 | 12 |
| | 2 | 7 | 14 | 2 | 7 | 16 | 1 | -1 | 0 |
| 14 | 1 | 5 | 5 | 1 | 5 | 9 | 2 | -1 | 1 |
| | 3 | 1 | 6 | 3 | 4 | 12 | 1 | -1 | 0 |
| 15 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | 6 | 2 | -1 | 0 |
| | 3 | 1 | 6 | 3 | 5 | 15 | 1 | 1 | 0 |
| 16 | 7 | 3 | 21 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 5 |
| | 1 | 1 | 5 | 3 | 2 | 12 | 3 | 7 | 21 |
| 17 | 1 | 3 | 6 | 5 | 3 | 15 | -1 | 1 | 0 |
| | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 | 6 | 1 | -2 | 0 |
| 18 | 5 | 2 | 15 | 5 | 2 | 10 | 4 | -1 | 0 |
| | 1 | 3 | 6 | 5 | 3 | 15 | 1 | -1 | 0 |
| 19 | 7 | 3 | 21 | 3 | 7 | 21 | 1 | 1 | 4 |
| | 3 | 7 | 21 | 1 | 1 | 6 | 1 | 1 | 5 |
| 20 | 3 | 5 | 15 | 3 | 1 | 6 | 1 | -1 | 0 |
| | 3 | 1 | 6 | 3 | 1 | 7 | 2 | -1 | 1 |

**Завдання 6.** ***Елементи інтервального аналізу.***

$$[p]=\left[\underline{p},\overline{p}\right]$$


***<u>Визначення 1.</u>***

Нехай дійсні числа $\underline{p}, \overline{p}$ такі, що $\underline{p} \le \overline{p}$ і при цьому задають дійсне число $p$ у параметричній відносно параметра $q \in [0, 1]$ формі

$$p(q) = (1-q)\underline{p} + q\overline{p}\,.$$

Тоді дійсне інтервальне число $[p]$ утворюється екстремальними реалізаціями цього числа:

$$\underline{p} = \min_{q}\{p(q);\quad q \in [0,1]\},\ \ \overline{p} = \max_{q}\{p(q);\quad q \in [0,1]\}$$

так, що воно може бути записано у формі

$$[p] = \left[\underline{p}, \overline{p}\right].$$

***<u>Зауваження 1.</u>***

Фіксоване число p буде мати вигляд інтервального числа, якщо його записати у такий спосіб: $p = [p, p]$.

***<u>Визначення 2.</u>***

Інтервальним комплексним числом $[\gamma = \rho + j\delta]$ називається комплексне число, у якого інтервальними є дійсна та уявна частини так, що є справедливим наступне: $[\gamma = \rho + j\delta] = [\rho] + j[\delta]$, де $[\rho]=\left[\underline{\rho}, \overline{\rho}\right]$, $[\delta] = \left[\underline{\delta}, \overline{\delta}\right]$.

***<u>Визначення 3.</u>***

Сумою $[a] + [b] = [d]$ інтервальних чисел $[a] = \left[\underline{a}, \overline{a}\right]$ і $[b] = \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ називається інтервальне число $[d] = \left[\underline{d}, \overline{d}\right]$, граничні значення якого $\underline{d}$ і $\overline{d}$ розраховуються за допомогою співвідношень

$$\underline{d} = \min\left\{\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \overline{b}, \overline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\right\} = \underline{a} + \underline{b},$$
$$\overline{d} = \max\left\{\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \overline{b}, \overline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}\right\} = \overline{a} + \overline{b}.$$

***<u>Визначення 4.</u>***

Різницею $[a] - [b] = [d]$ інтервальних чисел $[a] = \left[\underline{a}, \overline{a}\right]$ і $[b] = \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ називається інтервальне число $[d] = \left[\underline{d}, \overline{d}\right]$, граничні значення якого $\underline{d}$ і $\overline{d}$ розраховуються за допомогою співвідношень

$$\underline{d} = \min\left\{\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\right\} = \underline{a} - \overline{b},$$
$$\overline{d} = \max\left\{\underline{a} - \underline{b}, \underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\right\} = \overline{a} - \underline{b}.$$

***Визначення 5.***

Добутком $[a]\cdot[b]=[d]$ інтервальних чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ і $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ називається інтервальне число $[d]=[\underline{d},\overline{d}]$, граничні значення якого $\underline{d}$ і $\overline{d}$ розраховуються за допомогою співвідношень

$$\underline{d}=\min\{\underline{a}\cdot\underline{b},\underline{a}\cdot\overline{b},\overline{a}\cdot\underline{b},\overline{a}\cdot\overline{b}\},$$
$$\overline{d}=\max\{\underline{a}\cdot\underline{b},\underline{a}\cdot\overline{b},\overline{a}\cdot\underline{b},\overline{a}\cdot\overline{b}\}.$$

***Визначення 6.***

Часткою від ділення інтервальних чисел $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ і $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ називається інтервальне число $[d]=[a]/[b]$, граничні значення якого $\underline{d}$ і $\overline{d}$ розраховуються за допомогою співвідношень

$$\underline{d}=\min\{\underline{a}/\overline{b},\overline{a}/\underline{b},\underline{a}/\underline{b},\overline{a}/\overline{b}\},$$
$$\overline{d}=\max\{\underline{a}/\overline{b},\overline{a}/\underline{b},\underline{a}/\underline{b},\overline{a}/\overline{b}\}.$$

**Приклади обчислень.**

***Задано*** числа: $[a]=[-3,1]$ та $[b]=[1,4]$ .

***Треба знайти***: $[a]+[b]$, $[b]-[a]$, $[a]\cdot[b]$, $[a]/[b]$, $[b]/[b]$, $[a]-[a]$.

***Результати обчислень:***

$[a]+[b]=[-3+1,\ 1+4]=[-2,\ 5]$;

$[b]-[a]=[1-1,4-(-3)]=[0,\ 7]$;

$$[a]\cdot[b]=[-3,1]\cdot[1,4]=\begin{bmatrix}\min\{-3\cdot1,-3\cdot4,1\cdot1,1\cdot4\},\\ \max\{-3\cdot1,-3\cdot4,1\cdot1,1\cdot4\}\end{bmatrix}=[-12,4];$$

$$\frac{[a]}{[b]}=\frac{[-3,1]}{[1,4]}=\left[\min\left\{-\frac{3}{1},-\frac{3}{4},\frac{1}{1},\frac{1}{4}\right\},\max\left\{-\frac{3}{1},-\frac{3}{4},\frac{1}{1},\frac{1}{4}\right\}\right]=[-3,1];$$

$$\frac{[b]}{[b]} = \frac{[1,4]}{[1,4]} = \left[\min\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{4},\frac{4}{1},\frac{4}{4}\right\}, \max\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{4},\frac{4}{1},\frac{4}{4}\right\}\right] = \left[\frac{1}{4},4\right];$$

[a] – [a] = [- 3, 1] – [- 3, 1] = [- 3 -1, 1- (- 3)] = [- 4, 4] .

***Завдання до виконання:***

- Вибрати на свій розсуд два інтервальних числа [a] і [b] .
- Виконати дії: $[a] + [b],\ [b] - [a],\ [a]\cdot[b],\ [a]/[b],\ [b]/[b], [a] - [a]$.

**Завдання 7.** ***Отримання передавальної функції моделі в змінних стану***

**Алгоритм 1.**

Знайти передавальну функцію моделі в змінних стану

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = 2x_1(t) - 7x_2(t) + 5u(t),\ \ x_1(0) = 8, \\ dx_2(t)/dt = 4x_1(t) - 9x_2(t) - 3u(t),\ \ x_2(0) = 5, \end{cases} \tag{7.1}$$

$$y(t) = 7x_1(t) - 2x_2(t).$$

*Виконання завдання.*

Передавальну функцію знаходимо за формулою

$$W(s) = C(sE - A)^{-1}B,$$

де матриці A, B та C мають наступні значення:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -9 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix},\ C = [7 \quad -2].$$

Використовуючи матрицю A знайдемо

$$sE - A = \begin{bmatrix} s-2 & 7 \\ -4 & s+9 \end{bmatrix} \text{ і}$$

$$(sE - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+9 & -7 \\ 4 & s-2 \end{bmatrix} / [(s-2)(s+9) - 4(-7)].$$

Виконавши необхідні операції з матрицями $C, (sE - A)^{-1}$ та B, отримаємо:

$$W(s) = [7 \quad -2]\begin{bmatrix} s+9 & -7 \\ 4 & s-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} / [(s-2)(s+9) - 4(-7)] =$$

$$= (41s+410)/(s^2+7s+10). \tag{7.2}$$

**Алгоритм 2.**

За допомогою апарату сигнальних графів (формула Мезона) знайти передавальну функції моделі в змінних стану з попереднього завдання.

*Виконання завдання.*

Математичну модель (7.1) в змінних стану за допомогою перетворення Лапласа

$$x(t) \leftrightarrow X(s),\ \ dx(t)/dt \leftrightarrow sX(s) - x(0),\ \ u(t) \leftrightarrow U(s),\ \ y(t) \leftrightarrow Y(s)$$

представимо у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \mathrm{sX_1(s) = 2X_1(s) - 7X_2(s) + 5U(s) + x_1(0),} \\ \mathrm{sX_2(s) = 4X_1(s) - 9X_2(s) - 3U(s) + x_2(0),} \end{cases} \qquad (7.3)$$
$$\mathrm{Y(s) = 7X_1(s) - 2X_2(s).}$$

За системою лінійних алгебраїчних виразів побудуємо сигнальний граф, який зображено на рис.1.

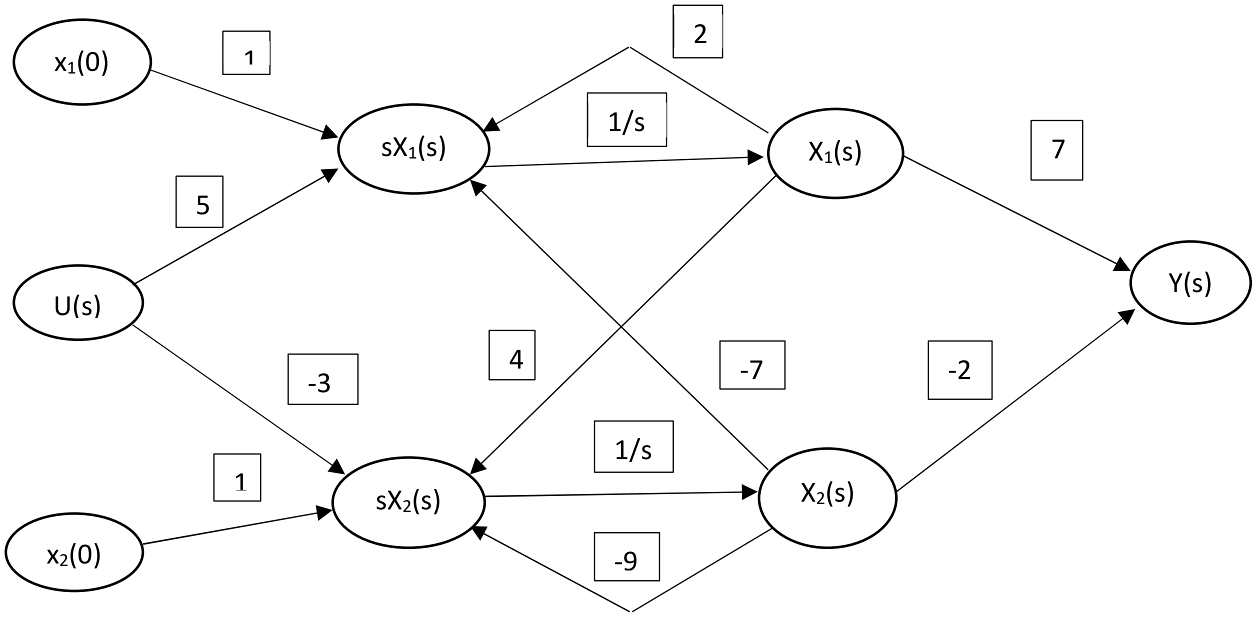


Рис.1. Сигнальний граф моделі (3)

Знайдемо коефіцієнти передач прямих шляхів, які з'єднують вузли U(s) та Y(s):

а) прямий шлях $\mathrm{U(s) \to sX_1(s) \to X_1(s) \to Y(s)}$ має коефіцієнт передачі

$$\Gamma_1 = 5\left(\frac{1}{s}\right)7 = \frac{35}{s};$$

б) прямий шлях $\mathrm{U(s) \to sX_2(s) \to X_2(s) \to Y(s)}$ має коефіцієнт передачі

$$\Gamma_2 = -3\left(\frac{1}{s}\right)(-2) = \frac{6}{s};$$

в) прямий шлях $U(s) \rightarrow sX_1(s) \rightarrow X_1(s) \rightarrow sX_2(s) \rightarrow X_2(s) \rightarrow Y(s)$ має коефіцієнт передачі

$$\Gamma_3 = 5\left(\frac{1}{s}\right)4\left(\frac{1}{s}\right)(-2) = -\frac{40}{s^2};$$

г) прямий шлях $U(s) \rightarrow sX_2(s) \rightarrow X_2(s) \rightarrow sX_1(s) \rightarrow X_1(s) \rightarrow Y(s)$ має коефіцієнт передачі

$$\Gamma_4 = -3\left(\frac{1}{s}\right)(-7)\left(\frac{1}{s}\right)7 = \frac{147}{s^2}.$$

Далі знайдемо коефіцієнти передач контурів зворотнього звязку:

а) контур зворотнього зв'язку $sX_1(s) \rightarrow X_1(s) \rightarrow sX_1(s)$ має коефіцієнт передачі

$$L_1 = \left(\frac{1}{s}\right)2 = \frac{2}{s};$$

в) контур зворотнього зв'язку $sX_2(s) \rightarrow X_2(s) \rightarrow sX_2(s)$ має коефіцієнт передачі

$$L_2 = \left(\frac{1}{s}\right)(-9) = -\frac{9}{s};$$

г) контур зворотнього зв'язку $sX_1(s) \rightarrow X_1(s) \rightarrow sX_2(s) \rightarrow X_2(s) \rightarrow sX_1(s)$ має коефіцієнт передачі

$$L_3 = \left(\frac{1}{s}\right)4\left(\frac{1}{s}\right)(-7) = -\frac{28}{s^2}.$$

Використовуючи знайдені коефіцієнти передачі та формулу Мезона, розраховуємо передавальну функцію моделі (1):

$$W(s) = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 - \Gamma_1 L_2 - \Gamma_2 L_1}{1 - L_1 - L_2 - L_3 + L_1 L_2} =$$

$$= \frac{\frac{35}{s} + \frac{6}{s} - \frac{40}{s^2} + \frac{147}{s^2} - \frac{35}{s}\left(-\frac{9}{s}\right) - \frac{6}{s}\cdot\frac{2}{s}}{1 - \frac{2}{s} - \left(-\frac{9}{s}\right) - \left(-\frac{28}{s^2}\right) + \frac{2}{s}\left(-\frac{9}{s}\right)} = \frac{41s+4}{s^2+7s+1}\ . \quad (7.4)$$

Вираз (7.4) повинен збігтися з виразом (7.2) оскільки мова йде про передавальну функцію однієї моделі.

**Завдання для самостійного виконання:**

Використовуючи алгоритм 1 та алгоритм 2, відповідно до свого варіанту розрахувати передавальну функцію заданої математичної моделі в змінних стану

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t), \ \ x_1(0) = x_{10}, \\ dx_2(t)/dt = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t), \ \ x_2(0) = x_{20}, \end{cases}$$

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t).$$

| № варіанту | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $b_1$ | $b_2$ | $c_1$ | $c_2$ | $x_{10}$ | $x_{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -1 | 4 | -5 | 4 | 11 | 10 | -4 | 2 | -3 |
| 2 | 5 | -3 | 18 | -10 | 3 | 8 | 5 | -1 | 4 | -3 |
| 3 | -5 | 1 | -6 | 0 | 3 | 7 | -6 | 7 | 5 | 8 |
| 4 | -8 | 2 | -12 | 2 | 2 | 5 | 12 | -5 | 5 | -6 |
| 5 | -11 | 3 | -18 | 4 | 2 | 5 | 9 | -4 | 3 | 4 |
| 6 | -7 | 1 | -6 | -2 | 5 | 13 | 12 | -5 | 7 | -5 |
| 7 | 3 | -4 | 8 | -9 | 5 | 6 | -8 | 5 | 5 | 7 |
| 8 | 3 | -5 | 10 | -12 | 4 | 5 | 0 | 2 | 7 | -9 |
| 9 | 2 | -3 | 6 | -7 | -1 | -4 | 0 | 1 | 7 | 9 |
| 10 | -9 | 4 | -8 | 3 | 3 | 5 | 5 | -4 | 6 | 8 |
| 11 | -12 | 5 | -10 | 3 | -2 | -5 | 0 | 1 | 8 | 6 |
| 12 | -6 | 2 | -4 | 0 | -2 | -5 | 0 | 1 | 8 | -9 |
| 13 | 10 | -3 | 60 | -17 | -1 | -7 | 13 | -3 | 5 | -7 |
| 14 | 2 | -1 | 20 | -7 | 4 | 19 | 6 | -1 | 5 | 10 |
| 15 | -7 | -2 | 40 | -11 | 4 | 19 | 2 | 0 | 10 | 7 |
| 16 | -11 | 2 | -40 | 7 | 5 | 23 | -9 | -2 | 7 | -3 |
| 17 | 6 | -2 | -40 | -12 | 4 | 17 | 9 | -2 | 9 | -7 |
| 18 | -12 | 2 | -40 | 6 | -1 | -6 | -19 | 4 | 5 | -4 |
| 19 | -7 | 6 | -4 | 3 | 6 | 5 | -5 | 8 | 10 | 5 |
| 20 | 0 | -3 | 2 | -5 | 7 | 6 | 0 | 1 | 5 | 7 |
| 21 | 1 | -3 | 2 | -4 | 9 | 7 | -3 | 5 | 5 | -4 |
| 22 | 2 | -6 | 4 | -8 | 10 | 8 | -4 | 5 | 9 | 8 |
| 23 | -5 | 3 | -2 | 0 | 5 | 3 | 7 | -10 | 6 | -2 |
| 24 | -12 | 9 | -6 | 3 | -6 | -5 | 8 | -11 | 10 | 5 |
| 25 | -9 | 8 | -6 | 5 | 6 | 5 | -3 | 5 | 7 | -3 |