

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

з організації самостійної роботи з дисципліни
"Сучасна теорія управління" за освітнім рівнем "Магістр"
для студентів спеціальності
"151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології"

Затверджено на засіданні
кафедри комп'ютерно-інтегрованих
технологій та автоматизації
Протокол №7 від 15.06.2020 р.

Методичні вказівки з організації самостійної роботи з дисципліни "Сучасна теорія управління" для студентів за освітнім рівнем "Магістр" спеціальності "151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" / Укл. Корсун В.І. – Дніпро: ДВНЗ "УДХТУ", 2020.- 40 с.

Укладач: В.І. Корсун, д. т. н, професор
Відповідальний за випуск: О.П. Мисов, к.т.н., доцент

Зміст

1. Дотична лінеаризація нелінійних залежностей.....	4
2. Побудова структурних схем.....	9
3. Стійкість лінійних автономних систем.....	19
4. Керованість змінних стану.....	27
5. Спостережуваність та відтворюваність стану.....	34
6.Рекомендована література.....	41

1. ДОТИЧНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

1.1. Теоретичний матеріал

Під *лінеаризацією* розуміють процедуру заміни в околі робочої точки або опорної траєкторії нелінійної моделі лінійною.

Основний зміст гіпотези лінеаризації полягає в тому, що відмінність в розв'язках нелінійних рівнянь і їх лінеаризованих представлень не така вже істотна, щоб приводити до недопустимих похибок при розв'язанні поставленої задачі.

Найбільш поширеними є описані нижче методи лінеаризації.

Перший метод лінеаризації. Нелінійна функція є аналітичною в робочій області і її можна розкласти в ряд Тейлора.

Так, якщо змінні стану об'єкта $x(t) = [x_1(t) x_2(t) \dots x_n(t)]^T$ пов'язані з вхідними $u(t) = [u_1(t) u_2(t) \dots u_m(t)]$ та вихідними $y(t) = [y_1(t) y_2(t) \dots y_r(t)]$ змінними за допомогою нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= f(x(t), u(t), t), & x(t_0) &= x_0 \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

то, лінеаризуючи перше з них цим методом при умові наявності малих приростів $\Delta x(t)$, $\Delta x^{(1)}(t)$, $\Delta u(t)$ відносно стану рівноваги $f(x_0, u_0) = 0$ отримаємо лінійне рівняння

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \cdot \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \cdot \Delta u(t), \quad (1.2)$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

– матриці Якобі, x_0 – стан рівноваги при фіксованому управлінні u_0 і малих Δu .

Із другого рівняння системи (1.1) також отримаємо лінійне рівняння

$$\Delta y(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \cdot \Delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \cdot \Delta u(t), \quad (1.3)$$

з наступними значеннями частинних похідних:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1} & \frac{\partial g_r}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial u_1} & \frac{\partial g_r}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

Якщо виконати лінеаризацію відносно опорної траєкторії програмного руху з параметрами $x(t) = x_n(t)$, $u(t) = u_n(t)$, $y(t) = y_n(t)$, то система (1.1) буде мати вигляд :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x(t)}{dt} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_n(t) \\ u=u_n(t)}} \cdot \Delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_n(t) \\ u=u_n(t)}} \cdot \Delta u(t), \\ \Delta y(t) &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_n(t) \\ u=u_n(t)}} \cdot \Delta x(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_n(t) \\ u=u_n(t)}} \cdot \Delta u(t), \end{aligned} \quad (1.4)$$

Лінеаризовані рівняння (1.2), (1.3) динамічних моделей можна записати у векторно-матричній формі:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

де $A = \|a_{i,j}\|$, $B = \|b_{i,j}\|$, $C = \|c_{i,j}\|$, $D = \|d_{i,j}\|$ – матриці з незмінними елементами розмірів $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(r \times n)$, $(r \times m)$ відповідно.

Лінеаризація системи (1.4) дасть

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

де $A(t) = \|a_{i,j}(t)\|$, $B(t) = \|b_{i,j}(t)\|$, $C(t) = \|c_{i,j}(t)\|$, $D(t) = \|d_{i,j}(t)\|$ – змінні у часі матриці тих же порядків, що і в системі (1.5).

Другий метод лінеаризації. В ньому замість безпосереднього визначення частинних похідних в задані нелінійні рівняння вводяться змінні:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \Delta x(t), \\ u(t) &= u_0(t) + \Delta u(t), \\ y(t) &= y_0(t) + \Delta y(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Усі складові, що стоять в правих частинах нелінійних рівнянь (1.1), отриманих після підстановки (1.7), розбиваємо на три групи:

- складові, які не мають приростів $\Delta x(t)$ та $\Delta u(t)$;
- складові, які мають прирости $\Delta x(t)$ та $\Delta u(t)$ у вигляді простих множників;
- складові, які мають добутки або степені приростів $\Delta x(t)$ та $\Delta u(t)$.

Вважаючи прирости $\Delta x(t)$ та $\Delta u(t)$ малими по відношенню до відповідних координат опорної траєкторії ($x_0(t)$ та $u_0(t)$), можна знехтувати складовими третьої групи. Що ж стосується складових першої групи, то вони визначають опорний рух, а складові другої групи – рух у відхиленнях ($\Delta x(t)$, $\Delta u(t)$) від опорної траєкторії ($x_0(t)$ та $u_0(t)$).

1.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Лінеаризуємо диференціальне рівняння

$$m(t) \frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} + k \left(\frac{\partial h(t)}{\partial t} \right)^2 + m(t) \cdot g = p \cdot \frac{\partial m(t)}{\partial t}$$

відносно опорної траєкторії: $m(t) = m_0(t) + \Delta m(t)$ та $h(t) = h_0(t) + \Delta h(t)$.

Підставивши співвідношення, які складають опорну траєкторію в задане диференціальне рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} & [m_0(t) + \Delta m(t)] \frac{\partial^2 [h_0(t) + \Delta h(t)]}{\partial t^2} + k \left\{ \frac{\partial [h_0(t) + \Delta h(t)]}{\partial t} \right\}^2 + \\ & + [m_0(t) + \Delta m(t)] g = p \frac{\partial [m_0(t) + \Delta m(t)]}{\partial t} \end{aligned}$$

Із записаного вище рівняння маємо дві залежності:

а) відносно опорної траєкторії

$$m_0(t) \frac{\partial^2 h_0(t)}{\partial t^2} + k \left(\frac{\partial h_0(t)}{\partial t} \right)^2 + m_0(t) \cdot g = p \cdot \frac{\partial m_0(t)}{\partial t}$$

б) в приростах (лінійне рівняння)

$$\frac{\partial^2 h_0(t)}{\partial t^2} \Delta m(t) + m_0(t) \frac{\partial^2 \Delta h(t)}{\partial t^2} + 2k \frac{\partial h_0(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Delta h(t)}{\partial t} + g \cdot \Delta m(t) = p \cdot \frac{\partial \Delta m(t)}{\partial t}$$

Приклад 2. Виконаємо лінеаризацію моделі

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_1^2(t) + x_2^2(t) - 17; \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) \cdot x_2(t) - 4; \\ y(t) = x_1^2(t) \cdot x_2(t) \end{cases}$$

об'єкта керування в околі точки рівноваги, де $\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dx_2(t)}{dt} = 0$

Для знаходження точки, в якій будемо здійснювати лінеаризацію, розв'яжемо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1^2(t) + x_2^2(t) - 17 = 0 \\ x_1(t) \cdot x_2(t) - 4 = 0 \end{cases}$$

Одним із розв'язків цієї системи є пара $(x_1^*, x_2^*) = (4; 1)$.

Скориставшись першим методом лінеаризації, отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta x_1(t)}{dt} = a_{11}\Delta x_1(t) + a_{12}\Delta x_2(t); \\ \frac{d\Delta x_2(t)}{dt} = a_{21}\Delta x_1(t) + a_{22}\Delta x_2(t); \end{cases}$$

$$\Delta y(t) = c_1\Delta x_1(t) + c_2\Delta x_2(t),$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} = 2x_1^* = 8; & a_{12} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} = 2x_2^* = 2; \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} = x_2^* = 1; & a_{22} &= \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} = x_1^* = 4; \\ c_1 &= \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} = 2x_1^*x_2^* = 8; & c_2 &= \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{(x_1^*, x_2^*)} = [x_1^*]^2 = 16. \end{aligned}$$

Тут $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - 17$, $f_2 = x_1 \cdot x_2 - 4$, $g = x_1^2 \cdot x_2^2$.

Приклад 3. Лінеаризуємо функцію $y = x_1 \cdot x_2^2$ в околі точки (x_1^*, x_2^*) .

Нехай $y^* = x_1^* \cdot [x_2^*]^2$ та $x_1 = x_1^* + \Delta x_1$, $x_2 = x_2^* + \Delta x_2$, $y = y^* + \Delta y^*$.

Тоді після підстановки цих виразів у заданий отримаємо:

$$\begin{aligned} y^* + \Delta y &= (x_1^* + \Delta x_1) \cdot (x_2^* + \Delta x_2)^2 = x_1^* \cdot [x_2^*]^2 + 2x_1^*x_2^*\Delta x_2 + x_1^* \cdot (\Delta x_2)^2 + \\ &+ (x_2^*)^2 \cdot \Delta x_1 + 2x_2^*\Delta x_1\Delta x_2 + \Delta x_1(\Delta x_2) \end{aligned}$$

Оскільки

$$\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \approx 0, \quad [\Delta x_2]^2 \approx 0, \quad \Delta x_1 \cdot [\Delta x_2]^2 \approx 0,$$

то

$$\Delta y = [x_2^*]^2 \Delta x_1 + 2x_1^*x_2^*\Delta x_2. \quad (1.8)$$

Такий же самий результат можна отримати, якщо скористатися виразом повного диференціалу функції y :

$$dy = x_2^2 dx_1 + 2x_1 x_2 dx_2$$

Замінивши x_1 та x_2^* на x_1 та x_2^* , а диференціали dx_1 , dx_2 та dy на прирости Δx_1 , Δx_2 та Δy , отримаємо (1.8).

1.3 Задачі для самостійного виконання

Виконати лінеаризацію наведених нижче систем в околі їх точок рівноваги.

$$1) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_2 e^{x_1}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 x_2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1 \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 \cdot x_2; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 = \ln x_1, x_1 > 0; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1(x_2 - 1), \\ \dot{x}_2 = x_2(x_1 + x_1^2); \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + \sin x_2 - 1, \\ \dot{x}_2 = sh(x_1 - 1); \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 e^{x_2}, \\ \dot{x}_2 = x_2(1 + x_2); \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 - 3x_1 + 2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^2; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - e^{x_1}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - 1; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^2; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_1 + x_2} - 1, \\ \dot{x}_2 = x_2; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \sin x_2; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1^2), \\ \dot{x}_2 = x_2; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_2; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \dot{x}_1 = (2 - x_1 - 2x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (2 - x_2 - 2x_1)x_2; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - 2x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_2(3 - 2x_2); \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin(x_1 + 2x_2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \ln(1 - x_2); \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + 3x_1^5; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2^2 + 7, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - 13; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1; \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1; \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - 1, \\ \dot{x}_2 = \ln(x_1^2 - x_2); \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - 2; \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1 - \cos x_2, \\ \dot{x}_2 = \sin^2 x_1 + 1 - e^{x_2}; \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} \dot{x}_1 = 4 \sin x_1 + \ln(1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_1^2 x_2; \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2; \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} \dot{x}_1 = \sin 2x_1, \\ \dot{x}_2 = 3 \cos x_2. \end{cases}$$

2. МОДЕЛІ В ЗМІННИХ СТАНУ І ЇХ ПРЕДСТАВЛЕННЯ В РІЗНИХ БАЗИСАХ. ПОБУДОВА СТРУКТУРНИХ СХЕМ

2.1. Теоретичний матеріал

При визначенні будь-якого поняття виникає потреба оперувати іншими, більш простими. У цьому розумінні поняття «стан» є первинним, оскільки немає більш простого поняття, за допомогою якого можна було б визначити, що таке стан динамічного об'єкта (системи). В теорії систем стан як первинне поняття не визначено. З'ясувати сенс цього поняття можна лише за допомогою різних прикладів.

Характеристика поняття «стан» дається, виходячи із тієї ролі, яку воно відіграє в описі об'єкта управління. Дійсно, один і той же вхідний сигнал електричного ланцюга зумовлює різні вихідні сигнали, якщо не фіксувати величину струму, що протікає через індуктивність, і напругу на ємності в момент часу t .

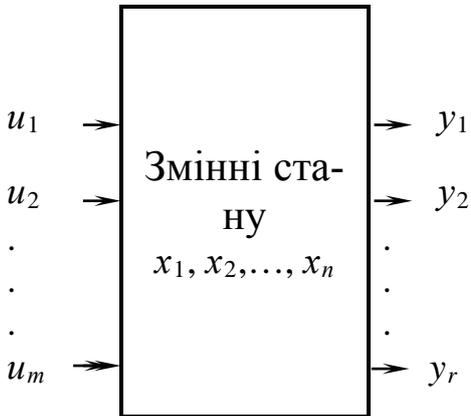
Задіяння проміжних змінних пов'язане з бажанням усунути вказану вище неоднозначність між вхідними та вихідними сигналами об'єкта управління.

Називаючи проміжні змінні *станом об'єкта*, поняття «стан» можна трактувати як мінімальну сукупність змінних, що має всю інформацію відносно попередньої поведінки об'єкта, яка необхідна для того, щоб судити про його майбутню поведінку, тобто для визначення його реакції на довільний вхідний вплив.

Вимога мінімуму проміжних змінних у визначенні поняття «стан» пов'язана з необхідністю усунення надмірності в описі останнього.

З математичної точки зору станом системи можуть бути початкові умови в момент t_0 для розв'язання системи диференціальних або різницевих рівнянь, оскільки різним початковим умовам відповідають різні розв'язки, які можна також розглядати як змінні стану.

Узагальнюючи вищесказане, відмітимо, що при аналізі будь-якої системи усі змінні, які її характеризують або які мають до неї будь-яке відношення, можна поділити на три групи (рис.2.1) :



- вхідні змінні $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ – змінні, що характеризують зовнішній вплив на входи системи;
- змінні стану $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – внутрішні, проміжні змінні, сукупність яких повністю характеризує властивості системи;
- вихідні змінні $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ – реакція системи на зовнішні впливи і той стан, який цікавить дослідника.

Рис.2.1. – Змінні, що характеризують систему

Виходячи із вищесказаного відмітимо що модель системи із введеним поняттям стану володіє такими властивостями:

- вихідний сигнал в даний момент часу однозначно визначається вхідним сигналом і станом в даний момент часу;
- стан в наступний момент часу однозначно визначається вхідним сигналом і станом в даний момент часу.

Наведені вище властивості неперервних детермінованих моделей об'єктів (систем) можна, наприклад, подати парою рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

$$y(t) = \varphi(x(t), u(t)). \quad (2.2)$$

Диференціальне рівняння (2.1), яке називається *рівнянням стану об'єкта* при $x(t_0) = x_0$ дає вектор стану

$$x(t) = \psi(x_0, u(t)).$$

В свою чергу, рівняння (2.2) визначає вихідні змінні в залежності від $x(t)$ та $\varphi(t)$. Тому його називають *вихідним рівнянням* (рівнянням виходу) об'єкта (системи) .

В окремих випадках рівняння стану і рівняння виходу приймають свою специфічну форму :

- для лінійної неперервної стаціонарної системи :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (2.3)$$

- для цифрового фільтра :
-

$$x[(k+1)T] = Ax[kT] + Bu[kT], \quad x[k_0T] = x_0; \quad y[kT] = Cx[kT] + Du[kT].$$

- для кінцевого автомата :

$$S(n+1) = \delta(S(n), x(n)), \quad S(0) = S_0; \quad y(n) = \lambda(S(n), x(n)).$$

Слід відмітити, що якісні властивості змінних стану при одних і тих же сигналах $u(t)$ і $y(t)$ суттєво залежить від базису, який використовується для їх опису.

Так, скориставшись підстановкою $x(t) = R z(t)$, де $R = [u_1 \vdots u_2 \vdots \dots \vdots u_m]$ - модальна матриця, тобто матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці A заданої системи, отримаємо записану нижче математичну модель в змінних стану:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \Lambda z(t) + \bar{B}u(t), \quad z(0) = z_0;$$

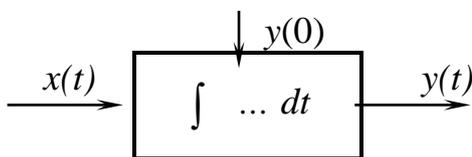
$$y(t) = \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t).$$

Тут $\Lambda = R^{-1}AR = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, λ_i , $(i = \overline{1, n})$ - власні числа матриці A , $\bar{B} = R^{-1}B$, $\bar{C} = CR$, $\bar{D} = D$.

Для цієї системи характерним є те, що всі її змінні стану є незалежними між собою.

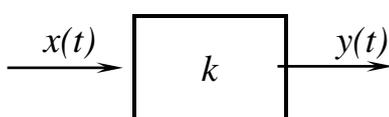
Часто динамічні моделі в змінних стану зображують за допомогою структурних схем, елементами яких є такі блоки:

а) інтегратор

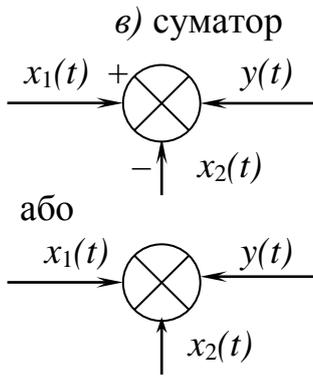


$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau + y(0)$$

б) підсилювач



$$y(t) = kx(t)$$



$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

Скалярні величини на структурних схемах зображують одинарними стрілками, а векторні – подвійними.

Іноді бажано отримати математичну модель об'єкта (системи) в просторі стану спираючись на відоме диференціальне рівняння, яке описує його (її) динаміку.

Наприклад, диференціальне рівняння

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 u(t) \quad (2.4)$$

можна перетворити у модель в змінних стану такими способами:

Спосіб I. Змінні стану визначаються співвідношеннями

$$x_n^{(1)}(t) = x_{i+1}(t), i = \overline{1, n-1},$$

$$x_n^{(1)}(t) = -\frac{a_0}{a_n} x_1(t) - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) + \frac{1}{a_n} u(t),$$

а матриці A , B , C і D моделі (2.3) мають вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \frac{a_0}{a_n} & \frac{a_1}{a_n} & \frac{a_2}{a_n} & \dots & \frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \\ \frac{a_n}{a_n} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$C = [b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n : b_1 - \frac{a_1}{a_n} b_n : \dots : b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n], \quad D = \begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix}$$

Якщо в лінійному диференціальному рівнянні (2.4) всі $b_j=0$ для $j = \overline{1, m}$, то воно може бути приведене до форми, яка називається "нормальною". Остання характеризується тим, що змінна $y(t)$ і її похідні $y^{(i)}(t)$, $i = \overline{n-1}$ вважаються змінними стану, а $y^{(n)}(t)$ виражається через них із диференціального рівняння (2.4). Простір стану при цьому називають фазовими, а координати $x_i(t)$ – фазовими координатами.

Структурна схема моделі (2.3), (2.6) представлена на рис. 2.3.

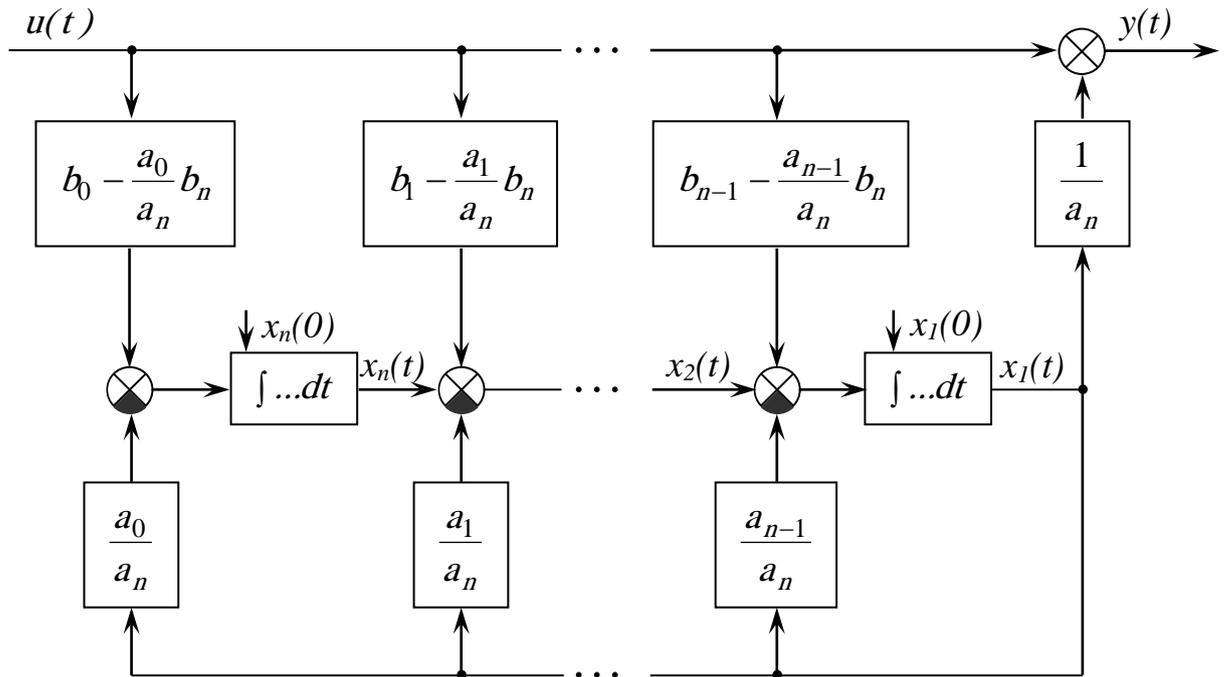


Рис. 2.3 – Структурна схема моделі (2.3), (2.6)

2.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Математичну модель

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 3u(t), & x_1(0) = 5; \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 7x_1(t) - 9x_2(t) + 6u(t), & x_2(0) = -4; \\ y(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) \end{cases}$$

записати у базисі, утвореному власними векторами матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

Для розв'язання сформульованої вище задачі знаходимо власні числа та власні вектори матриці A :

а)

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -7 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0, \quad \lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = -2;$$

б)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 2 & +4 \\ -7 & \lambda_1 + 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} -7u_{11} + 4u_{21} = 0, \\ u_{11} = c, \quad u_{21} = 7c/4, \end{matrix} \quad u_1 = \begin{bmatrix} c \\ 7c/4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 - 2 & 4 \\ -7 & \lambda_2 + 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} -4u_{12} + 4u_{22} &= 0, \\ u_{12} &= c_1, \quad u_{22} = c, \end{aligned} \quad u_2 = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix},$$

Таким чином,

$$R = \begin{bmatrix} c & c \\ 7c/4 & c \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{3c} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}B = \begin{bmatrix} 4/c \\ -1/c \end{bmatrix}, \quad CR = [-13c/4 \quad -c], \quad R^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} -15/c \\ 17/c \end{bmatrix}.$$

Математична модель об'єкта в базисі, утвореному власними векторами u_1 та u_2 матриці A має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -5z_1(t) + \frac{4}{c}u(t), & z_1(0) = -\frac{12}{c}; \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = -2z_2(t) - \frac{1}{c}u(t), & z_2(0) = \frac{17}{c}; \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{13 \cdot c}{4}z_1(t) - c \cdot z_2(t).$$

Приклад 2. Математичні моделі попереднього прикладу (задану і отриману) зобразити у вигляді структурної схеми.

Структурні схеми заданої і отриманої при $c = 1$ моделей мають вигляд, представлений на рис. 2.4 та рис. 2.5 відповідно.

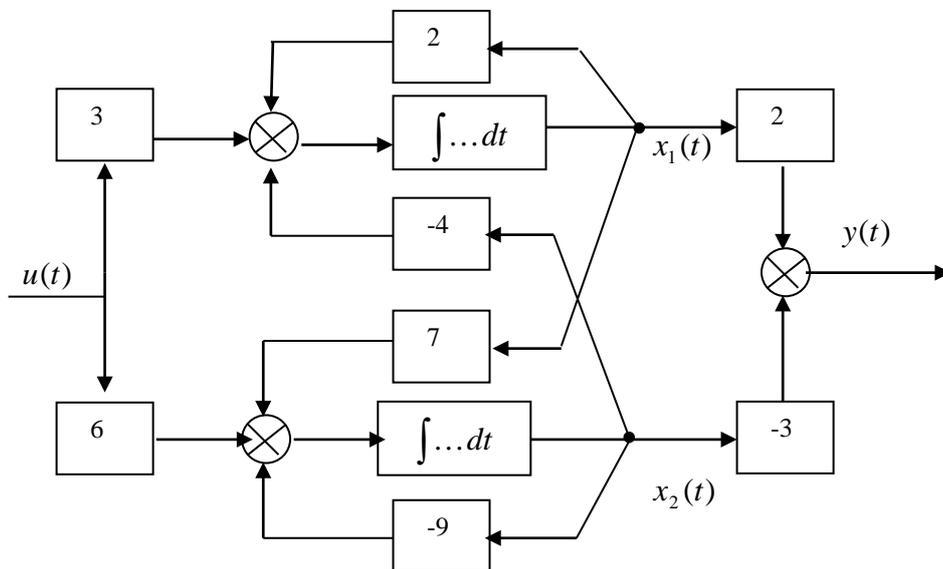


Рис.2.4 – Структурна схема заданої моделі

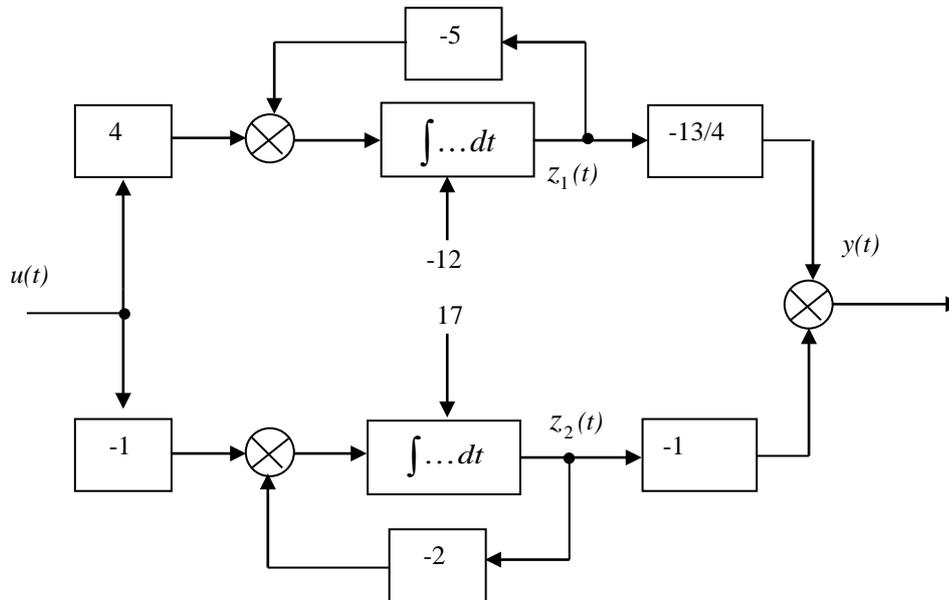


Рис. 2.5 – Структурна схема канонічної моделі

2.3. Задачі для самостійного виконання

1. Математичні моделі, записані нижче, представити в канонічній формі з діагональною матрицею при змінних стану. Побудувати для обох видів моделей структурні схеми.

- | | |
|--|---|
| 1) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + 4u(t), & x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 5x_2(t) + 11u(t), & x_2(0) = -3, \\ y(t) = 10x_1(t) - 4x_2(t); \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t) + 3u(t), & x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = 18x_1(t) - 10x_2(t) + 8u(t), & x_2(0) = -3, \\ y(t) = 5x_1(t) - x_2(t); \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + x_2(t) + 3u(t), & x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) + 7u(t), & x_2(0) = 8, \\ y(t) = x_1(t); \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -8x_1(t) + 2x_2(t) + 2u(t), & x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -12x_1(t) + 2x_2(t) + 5u(t), & x_2(0) = -6, \\ y(t) = 12x_1(t) - 5x_2(t); \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -11x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), & x_1(0) = 3, \\ \dot{x}_2(t) = -18x_1(t) + 4x_2(t) + 5u(t), & x_2(0) = 4, \\ y(t) = 9x_1(t) - 4x_2(t); \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -7x_1(t) + x_2(t) + 5u(t), & x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 2x_2(t) + 13u(t), & x_2(0) = -5, \\ y(t) = 12x_1(t) - 5x_2(t); \end{cases}$ |
| 7) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) - 4x_2(t) + 5u(t), & x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 8x_1(t) - 9x_2(t) + 6u(t), & x_2(0) = 7, \\ y(t) = -8x_1(t) + 5x_2(t); \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t) + 4u(t), & x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = 10x_1(t) - 12x_2(t) + 5u(t), & x_2(0) = -9, \\ y(t) = 2x_2(t); \end{cases}$ |
| 9) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) - u(t), & x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 7x_2(t) - 4u(t), & x_2(0) = 9, \\ y(t) = x_2(t); \end{cases}$ | 10) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -9x_1(t) + 4x_2(t) + 3u(t), & x_1(0) = 6, \\ \dot{x}_2(t) = -8x_1(t) + 3x_2(t) + 5u(t), & x_2(0) = 8, \\ y(t) = 5x_1(t) - 4x_2(t); \end{cases}$ |
| 11) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -12x_1(t) + 5x_2(t) - 2u(t), & x_1(0) = 8, \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) + 3x_2(t) - 5u(t), & x_2(0) = 6, \\ y(t) = x_2(t); \end{cases}$ | 12) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -6x_1(t) + 2x_2(t) - 2u(t), & x_1(0) = 8, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - 5u(t), & x_2(0) = -9, \\ y(t) = x_2(t); \end{cases}$ |

$$\begin{array}{l}
13) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 10x_1(t) - 3x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 60x_1(t) - 17x_2(t) - 7u(t), \quad x_2(0) = -7, \end{array} \right. \quad 14) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 20x_1(t) - 7x_2(t) + 19u(t), \quad x_2(0) = 10, \end{array} \right. \\
y(t) = 13x_1(t) - 3x_2(t); \quad y(t) = 6x_1(t) - x_2(t); \\
15) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -7x_1(t) - 2x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 11x_2(t) + 19u(t), \quad x_2(0) = 7, \end{array} \right. \quad 16) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -11x_1(t) + 2x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = -40x_1(t) + 7x_2(t) + 23u(t), \quad x_2(0) = -3, \end{array} \right. \\
y(t) = 2x_1(t); \quad y(t) = -9x_1(t) - 2x_2(t); \\
17) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 6x_1(t) - 2x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 9, \\ \dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 12x_2(t) + 17u(t), \quad x_2(0) = -7, \end{array} \right. \quad 18) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -12x_1(t) + 2x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -40x_1(t) + 6x_2(t) - 6u(t), \quad x_2(0) = -4, \end{array} \right. \\
y(t) = 9x_1(t) - 2x_2(t); \quad y(t) = -19x_1(t) + 4x_2(t); \\
19) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -7x_1(t) + 6x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + 3x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = 5, \end{array} \right. \quad 20) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -3x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 5x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 7, \end{array} \right. \\
y(t) = -5x_1(t) + 8x_2(t); \quad y(t) = x_2(t); \\
21) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - 3x_2(t) + 9u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = -4, \end{array} \right. \quad 22) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 6x_2(t) + 10u(t), \quad x_1(0) = 9, \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 8x_2(t) + 8u(t), \quad x_2(0) = 8, \end{array} \right. \\
y(t) = -3x_1(t) + 5x_2(t); \quad y(t) = -4x_1(t) + 5x_2(t); \\
23) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 3x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 6, \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = -2, \end{array} \right. \quad 24) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -12x_1(t) + 9x_2(t) - 6u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) + 3x_2(t) - 5u(t), \quad x_2(0) = 5, \end{array} \right. \\
y(t) = 7x_1(t) - 10x_2(t); \quad y(t) = 8x_1(t) - 11x_2(t); \\
25) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -9x_1(t) + 8x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) + 5x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = -3, \end{array} \right. \quad 26) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - 4x_2(t) + 11u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 6x_2(t) + 9u(t), \quad x_2(0) = 9, \end{array} \right. \\
y(t) = -3x_1(t) + 5x_2(t); \quad y(t) = -14x_1(t) + 19x_2(t); \\
27) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) - 8x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 9, \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 10x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = -8, \end{array} \right. \quad 28) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 6, \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t) - u(t), \quad x_2(0) = 10, \end{array} \right. \\
y(t) = 13x_1(t) - 17x_2(t); \quad y(t) = 11x_1(t) - 14x_2(t); \\
29) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -6x_1(t) + 4x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -3x_1(t) + x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 7, \end{array} \right. \quad 30) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -9x_1(t) + 6x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -7, \end{array} \right. \\
y(t) = 10x_1(t) - 13x_2(t); \quad y(t) = 5x_1(t) - 6x_2(t);
\end{array}$$

2. Моделі об'єктів керування, які описуються наступними диференціальними рівняннями, записати у вигляді моделі в змінних стану і побудувати для них структурні схеми.

$$1) 2y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 5y(t) = 8u^{(2)}(t) + 7u^{(1)}(t) + 5u(t),$$

$$2) 4y^{(3)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 2y(t) = 7u^{(2)}(t) + 5u^{(1)}(t) + u(t),$$

$$3) 5y^{(2)}(t) + 7y(t) = 2u^{(2)}(t) - 6u^{(1)}(t) + 5u(t),$$

- 4) $8y^{(3)}(t) + 6y^{(2)}(t) - 4y^{(1)}(t) = 2u^{(1)}(t) + 3u$,
- 5) $9y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 8y(t) = 6u^{(2)}(t) - 7u^{(1)}(t) + 9u(t)$,
- 6) $y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 7y(t) = 5u^{(2)}(t) - 6u^{(1)}(t) + 8u(t)$,
- 7) $2y^{(2)}(t) - 5y^{(1)}(t) + 8y(t) = 6u^{(2)}(t) + 5u^{(1)}(t) + u(t)$,
- 8) $4y^{(3)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 3y(t) = 2u^{(2)}(t) + 5u^{(1)}(t) + u(t)$,
- 9) $3y^{(2)}(t) - 4y^{(1)}(t) + 2y(t) = 6u^{(2)}(t) + 4u^{(1)}(t) - 7u(t)$,
- 10) $4y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 4y(t) = 5u^{(2)}(t) - 7u(t)$,
- 11) $2y^{(2)}(t) - 6y^{(1)}(t) + 2y(t) = -3u^{(2)}(t) + 4u^{(1)}(t) + 7u(t)$,
- 12) $3y^{(3)}(t) + 5y^{(1)}(t) - 8y(t) = 4u^{(2)}(t) + 2u(t)$,
- 13) $8y^{(2)}(t) - 4y^{(1)}(t) + 3y(t) = 6u^{(2)}(t) + 3u^{(1)}(t) + u(t)$,
- 14) $4y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) - 3y(t) = 5u^{(2)}(t) + 3u^{(1)}(t) + u(t)$,
- 15) $5y^{(2)}(t) - 3y^{(1)}(t) + 4y(t) = 2u^{(2)}(t) + 4u^{(1)}(t) - u(t)$,
- 16) $2y^{(3)}(t) + y(t) = 7u^{(2)}(t) + 6u^{(1)}(t) + 2u(t)$,
- 17) $6y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 5y(t) = 6u^{(2)}(t) + 8u(t)$,
- 18) $3y^{(3)}(t) + 7y^{(2)}(t) - 3y^{(1)}(t) + 5y(t) = 2u^{(1)}(t) + 7u(t)$,
- 19) $2y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 8y(t) = 7u^{(1)}(t) + 5u(t)$,
- 20) $y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t) + 7y(t) = 2u^{(2)}(t) - 7u^{(1)}(t) + 3u(t)$,
- 21) $2y^{(3)}(t) - 3y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t) + 5y(t) = 4u^{(2)}(t) - 3u^{(1)}(t) + 8u(t)$,
- 22) $4y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t) + 12y(t) = 3u^{(2)}(t) + 5u(t)$,

$$23) \quad 3y^{(2)}(t) + 7y^{(1)}(t) - 5y(t) = 8u^{(1)}(t) - 9u(t),$$

$$24) \quad 2y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 7y(t) = 4u^{(2)}(t) + u(t),$$

$$25) \quad 7y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) + 7y(t) = 4u^{(2)}(t) + u(t),$$

$$26) \quad 4y^{(2)}(t) - 6y^{(1)}(t) - 5y(t) = u^{(2)}(t) + 3u^{(1)}(t) - u(t),$$

$$27) \quad 5y^{(2)}(t) + 7y(t) = 2u^{(2)}(t) - 3u(t),$$

$$28) \quad 6y^{(3)}(t) - 4y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = u^{(1)}(t) + 3u(t),$$

$$29) \quad 7y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) + 5y(t) = 5u^{(1)}(t) + 6u(t),$$

$$30) \quad 8y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 5y(t) = 5u^{(1)}(t) - 9u(t).$$

3. СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ АВТОНОМНИХ СИСТЕМ

3.1. Теоретичний матеріал

Для системи, яка описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \tag{3.1}$$

поза залежністю від того, який її рух $\varphi(t)$ вибрано за незбурений і який початковий момент часу t_0 задано, має місце наступне:

1⁰. Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння $\det(\lambda E - A) = 0$ від'ємні, то незбурений рух є асимптотично стійким.

2⁰. Якщо серед коренів характеристичного рівняння є хоч би один, дійсна частина якого додатна, то незбурений рух є нестійким.

3⁰. Якщо деякі корені характеристичного рівняння мають нульові дійсні частини, а інші корені мають від'ємні дійсні частини, то:

- незбурений рух буде стійким (не асимптотично), коли корені з нульовими дійсними частинами є простими;
- незбурений рух буде нестійким, якщо хоч би один корінь з нульовою дійсною частиною є кратним.

Як відомо, система (3.1) є результатом лінеаризації відповідної нелінійної моделі в околі її стану рівноваги. Тому сформульоване вище положення складає основу першого методу Ляпунова.

Інтуїтивно ясно, що коли повна енергія деякої фізичної системи має мінімум в точці рівноваги, то ця точка є точкою стійкої рівноваги. Вищезазначена ідея лежить в основі методу аналізу стійкості, який називається прямим або

другим методом Ляпунова. Цей метод є єдиним відомим строгим апаратом дослідження стійкості нелінійних систем. Його суть полягає в тому, що якщо для системи $\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)]$ існує знакоозначена функція $V[x(t)]$, похідна за часом якої $dV[x(t)]/dt$ з врахуванням рівняння руху системи є знакосталою функцією зі знаком протилежним знакові функції $V[x(t)]$, то стан рівноваги стійкий. Якщо ж похідна $dV[x(t)]/dt$ є знакоозначеною функцією, протилежною за знаком з $V[x(t)]$, то стан рівноваги є асимптотично стійким.

Функції Ляпунова для лінійних систем будують за наступною схемою. Якщо треба проаналізувати стійкість системи (3.1), то функцію Ляпунова вибирають у вигляді квадратичної форми

$$V[x(t)] = x^T(t) B x(t)$$

з симетричною матрицею B .

Для знаходження матриці B вираховуємо повну похідну $V[x(t)]$ за часом, враховуючи при цьому систему (3.1):

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \frac{dx^T(t)}{dt} \cdot B \cdot x(t) + x^T(t) \cdot B \cdot \frac{dx(t)}{dt} = x^T(t) \cdot (A^T B + B A) \cdot x(t)$$

Будемо вимагати, щоб квадратична форма $V[x(t)]$ задовольняла рівнянню

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = W[x(t)], \quad (3.2)$$

де $W[x(t)] = x^T(t) C x(t)$ - задана квадратична форма.

Порівнюючи (3.1) та (3.2), отримаємо матричне рівняння Ляпунова для визначення матриці B :

$$A^T B + B A = C \quad (3.3)$$

Нехай $\text{Re } \lambda_j(A) < 0, 1 \leq j \leq n$. Тоді для будь-якої симетричної від'ємної означеної матриці C існує єдиний розв'язок матричного рівняння (3.3) у вигляді додатно означеної матриці B . При цьому рух заданої системи (3.1) буде асимптотично стійким.

Критерій стійкості Зубова В.І. Для з'ясування того факту, чи є система (3.1) стійкою у відповідності з цим критерієм, необхідно і достатньо переконатись в тому, що виконується умова:

$$B^k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

де $B = E + 2(A - E)^{-1}$.

Оцінку (3.4) є сенс здійснювати, використовуючи будь-яку із норм матриці:

$$\|B\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^n |B_{ij}|, \quad \|B\|_2 = \max_i \sum_{i=1}^n |B_{ij}|, \quad \|B\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij}^2}.$$

Підпростори стійких і нестійких станів лінійних систем зі сталими параметрами.

Якщо матриця A в n -вимірній системі (3.1) має n різних характеристичних чисел, то підпростір стійких станів цієї системи є дійсним лінійним підпростором, який породжений тими власними векторами матриці A , що відповідають власним числам зі строго від'ємними дійсними частинами. У свою чергу, для такої системи підпростір нестійких станів є дійсним підпростором, який породжено тими власними векторами, котрі відповідають власним числам з невід'ємними дійсними частинами.

3.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Вільна динамічна система описується диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 7x_1(t) - 9x_2(t). \end{cases}$$

Треба зробити висновок відносно стійкості цієї системи.

Матриця цієї системи має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

Запишемо її характеристичне рівняння:

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -7 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

Оскільки обидва корені цього рівняння

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{та} \quad \lambda_2 = -5$$

мають від'ємні значення, то задана динамічна система є асимптотично стійкою.

Приклад 2. За допомогою прямого методу Ляпунова з'ясувати характер стану $(0,0)$ рівноваги системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1^3(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2^3(t). \end{cases}$$

Тут не можна скористатися лінеаризованою моделлю. Проте можна показати, що стан рівноваги $(0,0)$ асимптотично стійкий, якщо розглянути поведінку функції Ляпунова $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ на траєкторіях заданої системи.

Дійсно, оскільки

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = 2x_1(-x_1^3) + 2x_2(-x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4),$$

то точка рівноваги $(0,0)$ є асимптотично стійкою нерухомою точкою системи $(V(x_1, x_2))$ та $dV(x_1, x_2)/dt$ є знакоозначеними функціями протилежних знаків).

Приклад 3. За допомогою другого методу Ляпунова оцінити стійкість вільного руху системи:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Для цього симетричну від'ємно означену матрицю C виберемо у вигляді:

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

В свою чергу, симетричну матрицю B будемо шукати у вигляді:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Підставивши матрицю A системи, а також матриці B та C в рівняння Ляпунова, отримаємо:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -4 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{cases} 4b_{11} + 14b_{12} = -4 \\ -4b_{11} - 7b_{12} + 7b_{22} = 0 \\ -8b_{12} - 18b_{22} = -5 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь, будемо мати матрицю

$$B = \begin{bmatrix} 87/20 & -107/70 \\ -107/70 & 67/70 \end{bmatrix},$$

яка відповідно критерію Сильвестра є додатно означеною, а задана система – асимптотично стійкою, оскільки $V(x) > 0$, а $dV(x)/dt < 0$.

Приклад 4. За допомогою критерію Зубова з'ясувати, чи є рух системи

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = 2x_1(t) - 4x_2(t), \\ dx_2(t)/dt = 7x_1(t) - 9x_2(t) \end{cases}$$

стійким.

Тут матриця A має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -0 \end{bmatrix}.$$

Тому матриця B дорівнює:

$$B = \begin{bmatrix} -1/9 & 4/9 \\ -7/9 & 10/9 \end{bmatrix},$$

а її степенями будуть матриці:

Оскільки норми цих матриць

$$\|B\|_1 = 1,8888, \quad \|B^2\|_1 = 1,7408, \quad \|B^4\|_1 = 0,6776, \quad \|B^8\|_1 = 0,4400 \quad \text{та} \quad \|B^{16}\|_1 = 0,1755$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -0,7654 & 0,4444 \\ -0,7778 & 0,9630 \end{bmatrix}, \quad B^4 = \begin{bmatrix} 0,3909 & 0,878 \\ 0,0960 & 0,5816 \end{bmatrix},$$

$$B^8 = \begin{bmatrix} 0,1612 & 0,0854 \\ 0,0934 & 0,3466 \end{bmatrix}, \quad B^{16} = \begin{bmatrix} 0,0340 & 0,0434 \\ 0,0474 & 0,1281 \end{bmatrix}$$

мають тенденцію зменшуватися до нуля, то слід чекати, що $B^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Тобто, вільний рух заданої системи є асимптотично стійким.

Приклад 5. Знайти підпростори стійкого та нестійкого станів системи, котра описується рівняннями:

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = x_1(t) + 2x_2(t), & x_1(0) = x_{10}, \\ dx_2(t)/dt = 2x_1(t) + x_2(t), & x_2(0) = x_{20}. \end{cases}$$

Матриця параметрів цієї системи має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо її власні числа

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0, \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1.$$

Отже, матриця A заданої системи має одне додатне $\lambda_1=3$ і одне від'ємне $\lambda_2=-1$ власні числа.

Обчислимо власний вектор u_1 , який відповідає характеристичному числу $\lambda_1=3$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & -2 \\ -2 & \lambda_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

або $2u_{11} - 2u_{21} = 0$.

Звідки маємо

$$u_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Цей власний вектор відповідає додатному характеристичному числу і тому визначає підпростір нестійких станів заданої системи.

Знайдемо тепер власний вектор u_2 , який відповідає характеристичному числу $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 - 1 & -2 \\ -2 & \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

або $-2u_{12} - 2u_{22} = 0$.

З останнього виразу маємо

$$u_2 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Отриманий вектор u_2 відповідає від'ємному характеристичному числу. Тому він визначає підпростір стійких станів системи, котра досліджується.

3.3. Задачі для самостійного виконання

1. За допомогою методів Ляпунова та критерію Зубова зробити висновок відносно стійкості записаних нижче систем.

2. Знайти підпростори стійкого та нестійкого рухів цих систем.

$$1) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 4x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - 5x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 7z_1(t) - 6z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 9z_1(t) - 8z_2(t), \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 18x_1(t) - 10x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 5z_1(t) - 4z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 6z_1(t) - 5z_2(t), \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -5z_1(t) + 4z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -6z_1(t) + 5z_2(t), \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -8x_1(t) + 2x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -12x_1(t) + 2x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -8z_1(t) + 6z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -9z_1(t) + 7z_2(t), \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -11x_1(t) + 3x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -18x_1(t) + 4x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 10z_1(t) + -8z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 12z_1(t) - 10z_2(t), \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -7x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 2x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 16z_1(t) - 9z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 30z_1(t) - 17z_2(t), \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 10x_1(t) - 12x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -11z_1(t) + 6z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -20z_1(t) + 11z_2(t), \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 7x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -17z_1(t) + 9z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -30z_1(t) + 16z_2(t), \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -9x_1(t) + 4x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -8x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 22z_1(t) - 12z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 40z_1(t) - 22z_2(t), \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -12x_1(t) + 5x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -10x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 4z_1(t) - 3z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 6z_1(t) - 5z_2(t), \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -6x_1(t) + 2x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 3z_1(t) - 2z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 4z_1(t) - 3z_2(t), \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 10x_1(t) - 3x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 60x_1(t) - 17x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -3z_1(t) + 2z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -4z_1(t) + 3z_2(t), \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 20x_1(t) - 7x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -5z_1(t) + 3z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -6z_1(t) + 4z_2(t), \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -7x_1(t) - 2x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 11x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 6z_1(t) - 4z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 8z_1(t) - 6z_2(t), \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -11x_1(t) + 2x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -40x_1(t) + 7x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -8z_1(t) + 9z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -6z_1(t) + 7z_2(t), \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 6x_1(t) - 2x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 12x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -5z_1(t) + 6z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -4z_1(t) + 5z_2(t), \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -12x_1(t) + 2x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -40x_1(t) + 6x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 5z_1(t) - 6z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 4z_1(t) - 5z_2(t), \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -7x_1(t) + 6x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 7z_1(t) - 9z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 6z_1(t) - 8z_2(t), \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 5x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -10z_1(t) + 12z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -8z_1(t) + 10z_2(t), \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - 3x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -5z_1(t) + 3z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -6z_1(t) + 4z_2(t), \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 6x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 8x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -3z_1(t) + 2z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -4z_1(t) + 3z_2(t), \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 3x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 3z_1(t) - 2z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 4z_1(t) - 3z_2(t), \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -12x_1(t) + 9x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) + 3x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 4z_1(t) - 3z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 6z_1(t) - 5z_2(t), \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -9x_1(t) + 8x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) + 5x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -6z_1(t) + 4z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -8z_1(t) + 6z_2(t), \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - 4x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 6x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -8z_1(t) - 6z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 9z_1(t) + 7z_2(t), \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) - 8x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 10x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -5z_1(t) - 4z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 6z_1(t) + 5z_2(t), \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 5x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 5z_1(t) + 4z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -6z_1(t) - 5z_2(t), \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -6x_1(t) + 4x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -3x_1(t) + x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = 7z_1(t) + 6z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -9z_1(t) - 8z_2(t), \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = -9x_1(t) + 6x_2(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1(t) = -10z_1(t) - 8z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = 12z_1(t) + 10z_2(t), \end{cases}$$

4. КЕРОВАНІСТЬ ЗМІННИХ СТАНУ

4.1. Теоретичний матеріал

Керованістю системи називається така її властивість, яка полягає в тому, що під дією деякого управляючого впливу $u(t)$ на протязі скінченного відрізка часу T вона переходить з будь-якого початкового стану $x(0)$ в начало координат $x(T) = 0$.

У цьому випадку система буде повністю керованою. Якщо ж даною властивістю система володіє не для усіх початкових станів або не по усім координатам, то вона буде неповністю керованою.

Мають місце і повністю некеровані системи.

Критерій керованості Калмана.

Система n -го порядку, яка описується рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

є повністю керованою, коли ранг матриці керованості

$$G = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] \quad (4.2)$$

дорівнює n .

Якщо $\text{rang} G = r < n$, то система є неповністю керованою. У цьому випадку можна виділити повністю керовану частину системи, що має порядок r . Інша частина системи, яка має порядок $n-r$, буде некерованою. Величина $q = n-r$ іменується *степенем некерованості* системи.

Коли система знаходиться під впливом єдиного сигналу $u(t)$, то матриця G – квадратна. Для повної керованості такої системи необхідно, щоб $\det G \neq 0$.

Критерій керованості Гільберта.

Система n -го порядку, яка описується рівняннями

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

з діагональною матрицею при змінних стану $x_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) є повністю керованою тоді, коли матриця при управляючих впливах $u_j(t)$ ($j = \overline{1, m}$) не має нульових рядків, тобто

$$[b_{k1} \ b_{k2} \ \dots \ b_{km}] \neq [0 \ 0 \ \dots \ 0] \text{ при } k = \overline{1, n}.$$

Підпростір керованих станів лінійної системи (4.1) зі сталими параметрами є лінійним простором, який складається із станів, котрі можуть бути досягнуті з нульового стану за скінчений термін T .

Цей лінійний підпростір є породженим l стовпцями матриці керованості

$$G = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B].$$

Якщо моделі (4.1) та (4.3) повністю керовані, то $l = n$. Інакше $l < n$.

Слід відмітити, що підпростір керованих станів системи (4.1) є інваріантним по відношенню до матриці A (тобто, коли вектор $x(t)$ належить підпростору керованих станів, то вектор $Ax(t)$ також належить цьому простору).

Канонічна форма керованості. Сформуємо невироджене перетворення з матрицею $T = [T_1 : T_2]$, де вектор-стовпці матриці T_1 утворюють базис m -вимірного ($m \leq n$) підпростору керованих станів системи (4.1), а вектор-стовпці матриці T_2 разом з вектор-стовпцями матриці $T_1 = [t_1 : t_2 : \dots : t_m]$ утворюють базис усього n -вимірного простору.

Запишемо це перетворення у вигляді: $x(t) = Tz(t)$.

Тоді диференціальне рівняння (4.1) перетвориться в канонічну форму керованості:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= CTz(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Тут A_{11} - матриця розміру $m \times m$, пара (A_{11}, B_1) є повністю керованою. Вектор $z_1(t)$ має вимірність m , а вектор $z_2(t)$ - $(n - m)$.

Відмітимо, що поведінка $z_2(t)$ повністю незалежна від впливу будь-яких зовнішніх причин, тоді як на $z_1(t)$ впливають $u(t)$ і $z_1(t)$. Той факт, що пара (A_{11}, B_1) є повністю керованою, є слідством приналежності стану $[z_1(0) : 0]^T$ підпростору керованих станів системи (4.4).

Власні числа матриці A_{11} називаються полюсами керованості системи, а власні числа матриці A_{22} - полюсами некерованості. Підпростір керованих станів системи (4.4) породжується власними векторами, які відповідають полюсам керованості системи.

4.2. Приклади розв'язування задач.

Приклад I. Для моделі об'єкта управління, яка має матрицю при змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ з дійсним спектром $\{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 4u(t), & x_1(0) = x_{10}; \\ dx_2(t)/dt = 7x_1(t) - 9x_2(t) + 7u(t), & x_2(0) = x_{21}; \\ y(t) = x_1(t) + 2x_2(t), \end{cases} \quad (4.5)$$

необхідно отримати її канонічну модель з діагональною матрицею і побудувати для останньої структурну схему.

З метою побудови канонічної моделі задану модель (4.5) представимо у векторно-матричній формі (4.1), де

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 2], \quad D = [0], \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Тепер за допомогою підстановки $x(t)=Rz(t)$, котра використовує модальну матрицю $R=[u_1; u_2]$, де $u_1=[4/7 \ 1]^T$ та $u_2=[1; 1]^T$ - власні вектори матриці A заданої системи, перейдемо від змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ до змінних стану $z_1(t)$ та $z_2(t)$.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \Lambda z(t) + \bar{B}u(t), \quad z(0) = z_0, \\ y(t) &= \bar{C}z(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (4.6)$$

де

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ - & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [18/7 \quad 3], \quad Z_0 = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7(x_{20} - x_{10})/3 \\ (7x_{10} - 4x_{20})/3 \end{bmatrix}.$$

Для побудови структурної схеми канонічної моделі (4.6) представимо її у скалярному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -5z_1(t) + 7u(t), & z_1(0) = z_{10}, \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = -2z_2(t), & z_2(0) = z_{20} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$y(t) = \frac{18}{7}z_1(t) + 3z_2(t)$$

Структурна схема цієї моделі представлена на рис. 4.1.

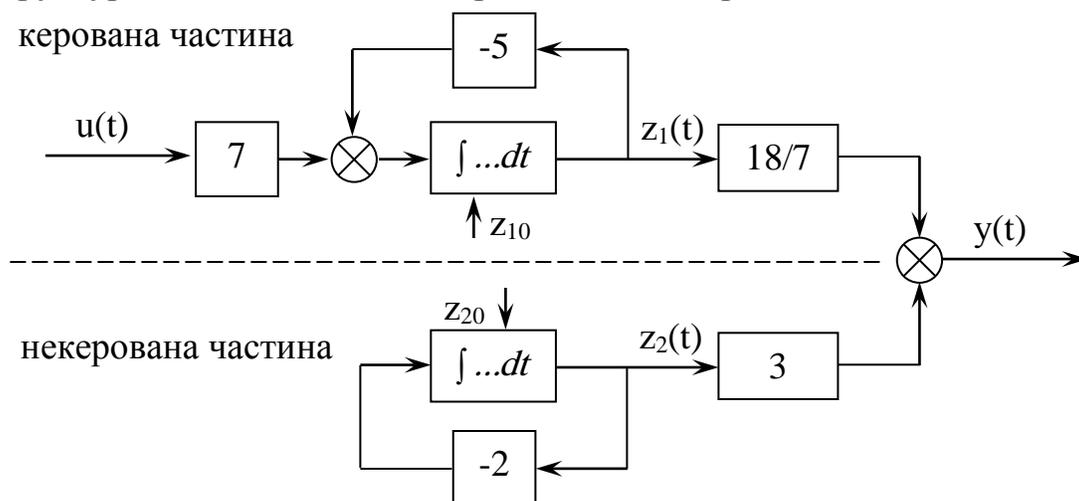


Рис. 4.1 – Структурна схема канонічної моделі

Приклад 2. Дослідити моделі (4.5) і (4.6) розглянуті у попередньому прикладі з метою визначення міри їхньої керованості за допомогою критеріїв Калмана та Гільберта.

Оскільки матриця при змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ у моделі (4.5) має загальний вигляд, то керованість цієї моделі будемо досліджувати за допомогою критерію Калмана.

Визначимо ранг матриці керованості

$$G = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 4 & -20 \\ 7 & -35 \end{bmatrix}.$$

Тут $\det G = -140 + 140 = 0$. Тому $\text{rang} G = I < 2 = n$. На основі цього робимо висновок: система (4.5) є частково керованою.

Зауважимо, що матрицю G можна записати у такий спосіб:

$$G = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \right].$$

Власне число $\lambda_1 = -5$, яке тут задіяне, є полюсом керованості системи (4.5).

У свою чергу, канонічна модель (4.6), яка є еквівалентною моделі (4.5), має діагональну матрицю $A = \text{diag}\{-5, -2\}$ при змінних стану $z_1(t)$ та $z_2(t)$.

При цьому матриця

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix},$$

що стоїть при керуючому впливові $u(t)$, є матрицею з одним нольовим рядком.

Тому, відповідно до критерію Гільберта, система (4.6) частково керована. Тобто, відносно заданої (4.5) і канонічної (4.6) моделей, які є еквівалентними, маємо однакові висновки – вони є частково керованими.

Приклад 3. Побудувати для моделей (4.5) та (4.6) підпростір керованих станів.

Оскільки у моделі (4.6) керованою змінною $z_1(t)$, а некерованою – змінною стану $z_2(t)$, то підпростір керованості визначається власним вектором $u_1 = [4/7] \mathbf{1}^T$ матриці A , з яким співпадають вісь z_1 і вектори $B = 7u_1$, та $AB = -5B = -35u_1$, котрі є складовими матриці керованості $G = [B \quad AB]$ (рис. 4.2).

Приклад 4. Для моделей (4.5) і (4.6) визначити область досяжності.

З розглянутого у прикладі 2 видно, що ці моделі є частково керованими. Тому для побудови області досяжності змінних стану вказаних моделей через точку (x_{10}, x_{20}) площини (x_1, x_2) проводимо пряму лінію паралельно власному векторові $u_1 = [4/7 \ 1] \mathbf{1}^T$ матриці A , що визначає підпростір керованості (рис. 4.3).

Частина площини між цією лінією і віссю z_1 , котра співпадає з власним вектором u_1 , є областю досяжності систем (4.5) та (4.6). Останнє означає: які б зміни не відбувалися з сигнальним впливом $u(t)$, зображуючі точки (x_1, x_2) та (z_1, z_2) системи змінних стану еквівалентних моделей (4.5) і (4.6) ніколи не вийдуть за межі побудованої полоси (області досяжності).

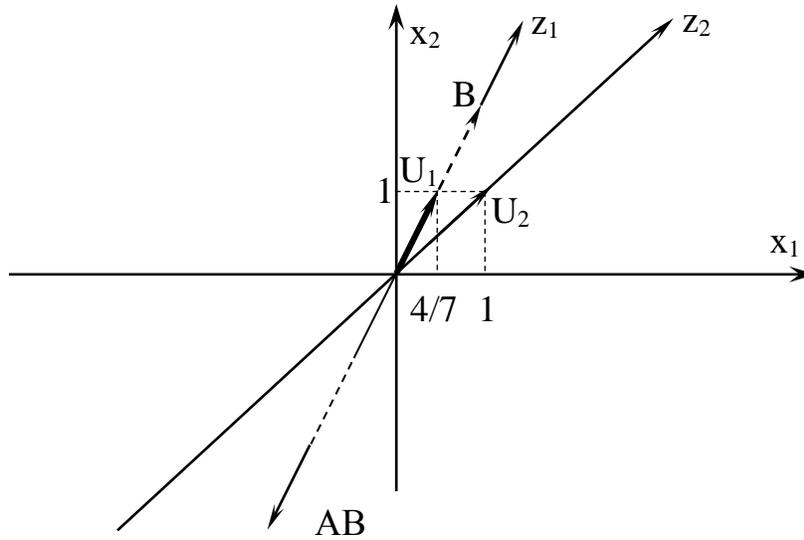


Рис. 4.2. Підпростір керованих станів моделей (4.5) та (4.6).

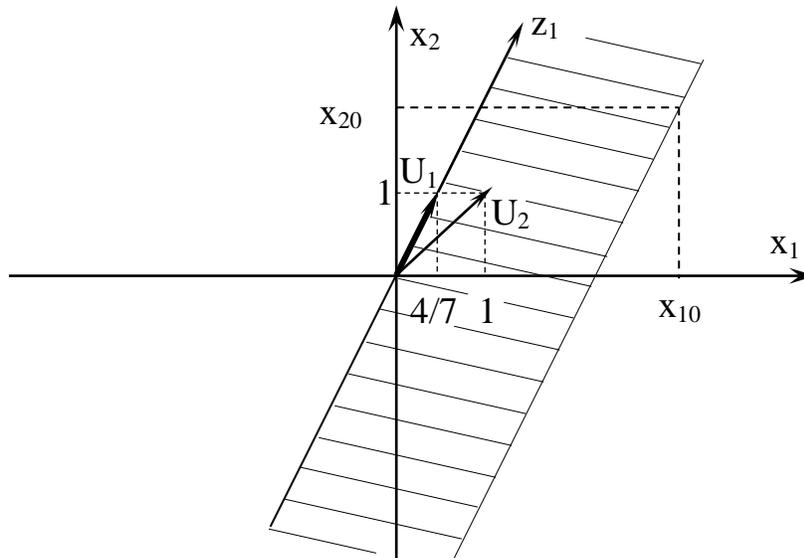


Рис. 4.3. Область досяжності системи

Зауваження: У випадку повної керованості моделі системи другого порядку областю досяжності є уся площина (x_1, x_2) .

Приклад 5. Для моделі (4.5) побудувати канонічну форму керованості.

В результаті розгляду прикладу 2 було встановлено, що ранг матриці керованості цієї моделі дорівнює одиниці в той час, коли її порядок дорівнює двом. Тобто модель (4.5) є частково керованою.

Тому для побудови канонічної форми керованості скористаємося перетворенням $x(t) = Tz(t)$ з матрицею $T = [T_1; T_2]$, сформованою у такий спосіб.

В якості вектора T_1 візьмемо вектор B , який є першим стовпцем матриці керованості G . Що ж стосується вектора T_2 , то його виберемо довільно, але так, щоб $\det T \neq 0$.

Нехай

$$T = [T_1 \quad T_2] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ і } \det T = 1, \text{ а } T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Канонічна форма керованості для моделі (4.5), враховуючи вищесказане, буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t), & z(0) &= T^{-1}x_0, \\ y(t) &= CTz(t), \end{aligned}$$

де

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$CT = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = [185], \quad z(0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{10} - x_{20} \\ -7x_{10} + 4x_{20} \end{bmatrix}.$$

Після цього запишемо канонічну форму керованості у скалярному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -5z_1(t) - z_2(t) + u(t), & z_1(0) = 2x_{10} - x_{20} \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = -2z_2(t), & z_2(0) = -7x_{10} + 4x_{20} \end{cases}$$

4.3. Задачі для самостійного виконання

1. Для записаних нижче моделей побудувати канонічні моделі з діагональними матрицями при змінних стану.
2. Дослідити задані та канонічні моделі з метою визначення міри їхньої керованості за допомогою критеріїв Калмана і Гільберта.
3. Визначити підпростори керованості та області досяжності змінних стану досліджуваних моделей.
4. Побудувати канонічні форми керованості для заданих моделей.

$$1) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 7x_1(t) - 6x_2(t) + 2u(t), & x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2(t) = 9x_1(t) - 8x_2(t) + 2u(t), & x_2(0) = -3, \\ y(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t); \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) - 4x_2(t) + 3u(t), & x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 5x_2(t) + 3u(t), & x_2(0) = 4, \\ y(t) = x_1(t); \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
3) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 4x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = -3, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) + 5x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 2, \end{array} \right. \quad 4) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -8x_1(t) + 6x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = -9x_1(t) + 7x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 2, \end{array} \right. \\
y(t) = 2x_1(t) - x_2(t); \quad y(t) = -4x_1(t) + 3x_2(t); \\
5) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 10x_1(t) - 8x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = 12x_1(t) - 10x_2(t) + 9u(t), \quad x_2(0) = -2, \end{array} \right. \quad 6) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 16x_1(t) - 9x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)x_2(t)u(t), \quad x_2(0) = -6, \end{array} \right. \\
y(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t); \quad y(t) = -x_1(t) + x_2(t); \\
7) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 11x_1(t) - 6x_2(t) + 9u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 20x_1(t) - 11x_2(t) + 15u(t), \quad x_2(0) = -6, \end{array} \right. \quad 8) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -11x_1(t) + 6x_2(t) + u(t), \quad x_1(0) = 3, \\ \dot{x}_2(t) = -20x_1(t) + 11x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -4, \end{array} \right. \\
y(t) = -8x_1(t) + 5x_2(t); \quad y(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t); \\
9) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -17x_1(t) + 9x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = -30x_1(t) + 16x_2(t) + 4u(t), \quad x_2(0) = 2, \end{array} \right. \quad 10) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 22x_1(t) - 12x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = -2, \\ \dot{x}_2(t) = 40x_1(t) - 22x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 4, \end{array} \right. \\
y(t) = -7x_1(t) + 4x_2(t); \quad y(t) = 7x_1(t) - 4x_2(t); \\
11) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 6, \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 5x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = 1, \end{array} \right. \quad 12) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = -3, \end{array} \right. \\
y(t) = 3x_1(t) - x_2(t); \quad y(t) = x_2(t); \\
13) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t) + u(t), \quad x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = 4, \end{array} \right. \quad 14) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) + 7x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -4, \end{array} \right. \\
y(t) = x_1(t); \quad y(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t); \\
15) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 6x_1(t) - 4x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 3, \\ \dot{x}_2(t) = 8x_1(t) - 6x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 2, \end{array} \right. \quad 16) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -8x_1(t) + 9x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) + 7x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -5, \end{array} \right. \\
y(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t); \quad y(t) = -5x_1(t) + 7x_2(t); \\
17) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 6x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 6, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + 5x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 4, \end{array} \right. \quad 18) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) - 6x_2(t) - 3u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 5x_2(t) - 2u(t), \quad x_2(0) = -2, \end{array} \right. \\
y(t) = -5x_1(t) + 7x_2(t); \quad y(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t); \\
19) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 7x_1(t) - 9x_2(t) - 6u(t), \quad x_1(0) = 3, \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 8x_2(t) - 4u(t), \quad x_2(0) = -2, \end{array} \right. \quad 20) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -10x_1(t) + 12x_2(t) - 9u(t), \quad x_1(0) = -2, \\ \dot{x}_2(t) = -8x_1(t) + 10x_2(t) - 6u(t), \quad x_2(0) = 3, \end{array} \right. \\
y(t) = x_1(t) - 2x_2(t); \quad y(t) = -x_1(t) + 2x_2(t); \\
21) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) + 4x_2(t) + 4u(t), \quad x_2(0) = 6, \end{array} \right. \quad 22) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + 3x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 2, \end{array} \right. \\
y(t) = -4x_1(t) + 3x_2(t); \quad y(t) = -5x_1(t) + 3x_2(t); \\
23) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t) - u(t), \quad x_2(0) = 5, \end{array} \right. \quad 24) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) - 3x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 3, \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 5x_2(t) - 2u(t), \quad x_2(0) = 2, \end{array} \right. \\
y(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t); \quad y(t) = -x_1(t); \\
25) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -6x_1(t) + 4x_2(t) - 3u(t), \quad x_1(0) = 6, \\ \dot{x}_2(t) = -8x_1(t) + 6x_2(t) - 3u(t), \quad x_2(0) = 5, \end{array} \right. \quad 26) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -8x_1(t) - 6x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = -4, \\ \dot{x}_2(t) = 9x_1(t) + 7x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 3, \end{array} \right. \\
y(t) = x_1(t); \quad y(t) = -x_1(t);
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
27) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) - 4x_2(t) - 6u(t), \quad x_1(0) = -5, \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) + 5x_2(t) + 9u(t), \quad x_2(0) = 2, \end{array} \right. & \quad 28) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) + 4x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 3, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t), \quad x_2(0) = -2, \end{array} \right. \\
y(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t); & \quad y(t) = -2x_1(t) - x_2(t); \\
29) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 7x_1(t) + 6x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = -9x_1(t) - 8x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -6, \end{array} \right. & \quad 30) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -10x_1(t) - 8x_2(t) - 3u(t), \quad x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = 12x_1(t) + 10x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = -8, \end{array} \right. \\
y(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t); & \quad y(t) = 4x_1(t) + 3x_2(t);
\end{aligned}$$

5. СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ ТА ВІДТВОРЮВАНІСТЬ ЗМІННИХ СТАНУ

5.1. Теоретичний матеріал

Спостережуваністю системи називається така її властивість, яка полягає в тому, що шляхом спостереження (виміру) на обмеженому відрізку часу T за вихідними величинами $y(t)$ при заданих вхідних впливах $u(t)$ можна визначити всі координати початкового стану системи $x(t_0)$.

У цьому випадку система буде повністю спостережуваною. Система буде частково спостережуваною, якщо в результаті обробки інформації відносно вихідної величини визначаються не всі координати початкового стану системи.

Якщо ж вихідний сигнал системи не містить ніякої інформації про змінні стану, то система буде не спостережуваною.

Спостережуваність означає, що є можливість оцінити $x(t_0)$ за майбутніми значеннями вхідних і вихідних змінних. В задачах управління і фільтрації, проте, є тільки значення вхідних $u(t)$ та вихідних $y(t)$ змінних при $t_0 - T \leq t \leq t_0$. Тому в останньому випадку більш доцільно розглядати таку властивість змінних стану, як відтворюваність, яка ставить задачу визначення стану $x(t_0)$ за минулими спостереженнями $u(t)$ та $y(t)$.

Критерії спостережуваності і відтворюваності Калмана

Система n -го порядку, що описується рівняннями

$$\begin{aligned}
dx(t)/dt &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

є повністю спостережуваною, коли ранг матриці спостережуваності

$$H = \begin{bmatrix} C^T : A^T C^T : (A^T)^2 C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

дорівнює n .

У тому випадку, якщо є єдина вимірювана вихідна величина $u(t)$, матриця C складається з одного рядка. При цьому матриця H є квадратною і система (5.1) буде повністю спостережуваною при умові, що $\det H \neq 0$.

В свою чергу, матриця відтворюваності для системи (5.1) має вигляд:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Неважко з'ясувати, що для системи (5.1) зі сталими параметрами спостережуваності витікає повна відтворюваність змінних стану і навпаки, оскільки $Q = H^T$ і $\text{rang}Q = \text{rang}H$.

Критерій спостережуваності і відтворюваності Гільберта

Система n -го порядку, яка описується рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

з діагональною матрицею A , що стоїть при змінних стану $x_i(t)$ $i = \overline{1, n}$ є повністю спостережуваною і відтворюваною, коли матриця спостереження (вимірювання) C не має нульових стовпців.

Підпростір спостережуваних (відтворюваних) станів

Підпростір, який є породженим стовпцями матриці спостережуваності H , або, що те ж саме, рядками матриці відтворюваності Q називається підпростіром спостережуваності (відтворюваності).

Якщо для системи n -го порядку (5.1) $\text{rang}H = \text{rang}Q = r$, то підпростір спостережуваних (відтворюваних) станів має вимірність r .

Канонічна форма спостережуваності

Якщо ранг матриці спостережуваності системи (5.1) дорівнює l ($l \leq n$), то сформуємо матрицю перетворення $z(t) = Vx(t)$ у вигляді:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix},$$

де вектор-рядки матриці V_1 утворюють базис l -вимірного підпростору спостережуваності (зокрема, їми можуть бути l лінійно незалежних рядків матриці Q). Вектор-рядки V_1 разом з вектор-рядками матриці V_2 утворюють базис n - вимірного простору.

Тоді система (5.1) в нових змінних стану приймає вигляд так званої *канонічної форми спостережуваності*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = Vx_0 \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + Du(t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

де $z_1(t)$ - l - вимірний вектор спостережуваних (відтворюваних), а $z_2(t)$ - $(n-l)$ - вимірний вектор не спостережуваних (невідтворюваних) змінних стану.

5.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Для моделі об'єкта управління, яка має матрицю при змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ з дійсним спектром $\{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) - x_2(t) + 3u(t); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 2u(t) \end{cases} \quad (5.6)$$

$$y(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t)$$

необхідно отримати її канонічну форму з діагональною матрицею і побудувати для останньої структурну схему.

З метою побудови канонічної моделі задану систему (5.6) представимо у векторно-матричній формі (5.1), де

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [4 \ -2], \quad D = [0], \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix};$$

Тепер за допомогою підстановки $x(t) = Rz(t)$, котра використовує модельну матрицю $R = [U_1; U_2]$; де $U_1 = [1; 1]^T$; та $U_2 = [1; 2]^T$ - власні вектори матриці A заданої системи, перейдемо від змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ до змінних стану $z_1(t)$ та $z_2(t)$.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= Az(t) + \bar{B}u(t); \quad z(0) = z_0; \\ y(t) &= \bar{c}z(t) + Du(t); \end{aligned} \quad (5.7)$$

де

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \bar{c} = [2; 0]; \quad z_0 = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{10} - x_{20} \\ x_{20} - x_{10} \end{bmatrix};$$

Для побудови структурної схеми канонічної моделі (5.7) представимо останню у скалярному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -2z_1(t) + 4u(t); \quad z_1(0) = z_{10}; \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = -3z_2(t) - u(t); \quad z_2(0) = z_{20}; \\ y(t) = 2z_1(t) \end{cases}$$

Структурна схема цієї моделі представлена на рис.5.1.

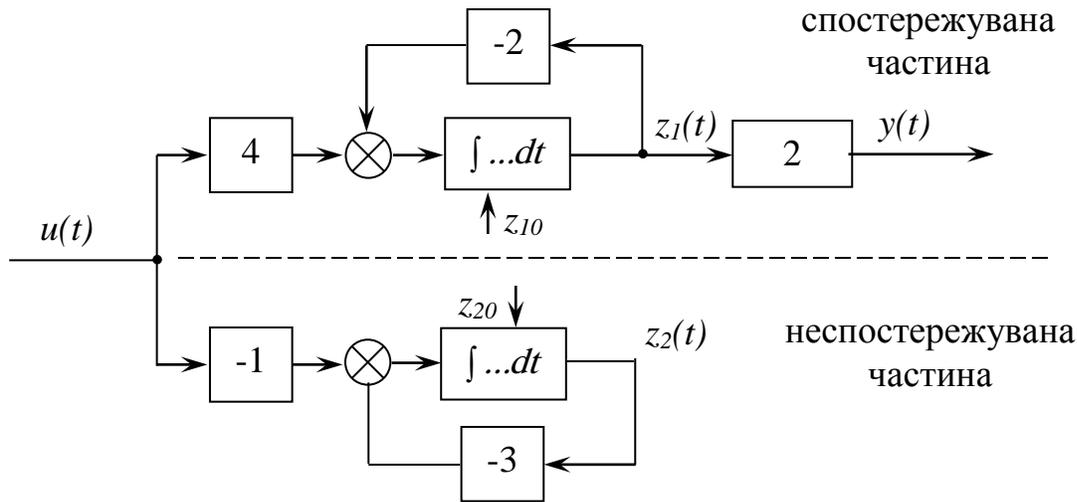


Рис.5.1- Структурна схема канонічної моделі.

Приклад 2.

Дослідити моделі (5.6) і(5.8), розглянуті у попередньому прикладі, з метою визначення міри їхньої керованості за допомогою критеріїв Калмана та Гільберта.

Визначемо ранг матриці спостережуваності:

$$H = [C^T : A^T C^T] = \begin{bmatrix} 4: & -8 \\ -2: & 4 \end{bmatrix};$$

Оскільки $detH=16-16 = 0$, тому $rangH=1<2=n$. На основі цього робимо висновок: система (5.6) є частково керованою.

Зауважимо, що матрицею H можна записати у такий спосіб:

$$H = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad -2 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right];$$

Власне число $\lambda_1 = -2$ матриці A^T , яке тут задіяне, є полюсом спостережуваності моделі (5.6). Вектор $[4;-2]^T$ є власним вектором матриці A^T .

У свою чергу, канонічна модель (5.8), яка є еквівалентною моделі (5.6), має діагональну матрицю $A = diag\{-2;-3\}$ при змінних стану $z_1(t)$ та $z_2(t)$.

При цьому матриця $\bar{C} = [2;0]$ котра відповідає за формування реакції системи $y(t)$, є матрицею з одним нульовим стовпцем.

Тому, відповідно до критерію Гільберта, система (5.6) є частково спостережуваною. Тобто, властивість спостережуваності (повної або часткової)

модель системи зберігає при переході від одного базису $(x_1(t), x_2(t))$ до іншого $(z_1(t); z_2(t))$;

Приклад 3.

Побудувати для моделей (5.6) та (5.8) підпростір спостережуваності.

Оскільки у моделі (5.8) спостережуваною змінною є змінна $z_1(t)$, то підпростір спостережуваності визначається власним вектором $W = [2; -1]^T$ матриці A^T , з яким співпадають вектори $C^T = 2W$ та $A^T C^T = -2C^T = -4W$, котрі є складовими матриці спостережуваності $H = [C^T : A^T C^T]$ (рис. 5.2.).

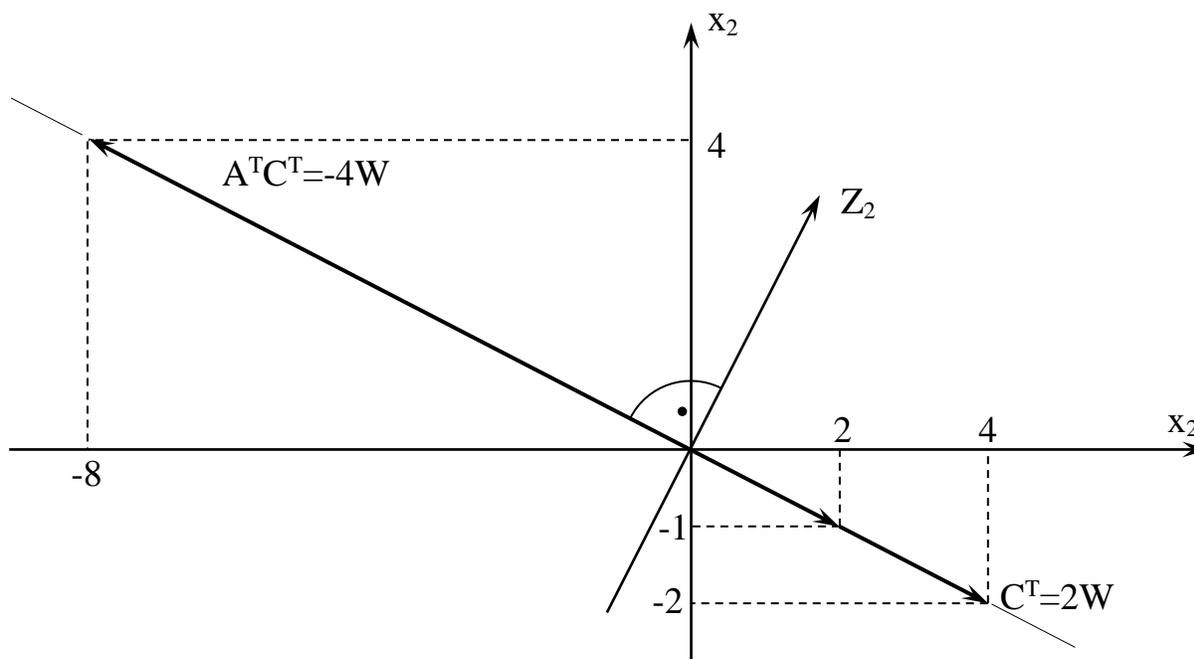


Рис. 5.2. Підпростір спостережуваності моделей (5.6) і (5.8)

Приклад 4.

Для моделі (5.6) побудувати канонічну форму спостережуваності.

В результаті розгляду прикладу 2 було вставлено, що ранг матриці спостережуваності цієї моделі дорівнює двом. Тобто вона є частково спостережуваною. Тому для побудови канонічної форми спостережуваності скористаємося перетворенням $z(t) = Vx(t)$ з матрицею:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_2 \end{bmatrix}$$

сформованою у такий спосіб.

В якості вектора V_1 візьмемо вектор C , який є першим рядком матриці відтворюваності $Q = H^T$. Що ж стосується вектора V_2 , то його веберемо довільно, але так, щоб $\det V \neq 0$.

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \ddot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ \ddot{1} & \ddot{2} \end{bmatrix}; \quad \det V = 10; \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 2/10 & 2/10 \\ -1/10 & 4/10 \end{bmatrix}.$$

Канонічна форма спостережуваності для моделі (5.6), враховуючи вище сказане, має вигляд:

$$\frac{dz(t)}{dt} = VAV^{-1}z(t) + VBu(t); \quad z(0) = Vx_0,$$

$$y(t) = CV^{-1}z(t),$$

де

$$VAV^{-1} = \begin{bmatrix} -2; 0 \\ 1.5; -3 \end{bmatrix}; \quad VB = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad CV^{-1} = [1; 0]; \quad z(0) = \begin{bmatrix} 4x_{10} - 2x_{20} \\ x_{10} + 2x_{20} \end{bmatrix}$$

Тепер запишемо канонічну форму спостережуваності у скалярному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -2z_1(t) + 8u(t), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = 1.5z_1(t) - 3z_2(t) + 7u(t), \\ y(t) = z_1(t), \end{cases} \quad \begin{cases} z_1(0) = 4x_{10} - 2x_{20}, \\ z_2(0) = x_{10} + 2x_{20}, \end{cases}$$

5.3. Задачі для самостійного виконання

1. Для записаних нижче моделей побудувати канонічні моделі з діагональними матрицями при змінних стану.
2. Дослідити задані та канонічні моделі з метою визначення міри їхньої спостережуваності за допомогою критеріїв Калмана і Гільберта.
3. Визначити підпростори спостережуваності досліджуваних моделей.
4. Побудувати канонічну форму спостережуваності для заданих моделей.

$$1) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) + 3u(t), & x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = 10x_1(t) - 7x_2(t), & x_2(0) = -10, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -7x_1(t) + 5x_2(t) + 4u(t), & x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) + 2x_2(t) + 4u(t), & x_2(0) = 8, \end{cases}$$

$$y(t) = 2x_1(t) - x_2(t); \quad y(t) = x_1(t) - x_2(t);$$

$$3) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + 7u(t), & x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + 6u(t), & x_2(0) = -6, \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 6x_1(t) + 5x_2(t) + 2u(t), & x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -14.4x_1(t) - 11x_2(t) - 3.2u(t), & x_2(0) = 7, \end{cases}$$

$$y(t) = x_1(t) + 3x_2(t); \quad y(t) = 1.8x_1(t) + x_2(t);$$

$$5) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) + 2x_2(t) - 2u(t), & x_1(0) = 3, \\ \dot{x}_2(t) = -28x_1(t) - 10x_2(t) + 7u(t), & x_2(0) = 5, \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 5x_2(t) + 10u(t), & x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = -2.4x_1(t) - 6x_2(t) - 6u(t), & x_2(0) = -5, \end{cases}$$

$$y(t) = 7x_1(t) + 2x_2(t); \quad y(t) = 0.6x_1(t) + x_2(t);$$

$$\begin{array}{l}
7) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 5x_2(t) - 10u(t), \quad x_1(0) = 9, \\ \dot{x}_2(t) = -4x_1(t) - 7x_2(t) + 8u(t), \quad x_2(0) = 7, \end{array} \right. 8) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 5x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + 8u(t), \quad x_2(0) = 6, \end{array} \right. \\
y(t) = x_1(t) + x_2(t); \quad y(t) = x_1(t) + 5x_2(t); \\
9) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + 5x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 8x_2(t) - 5u(t), \quad x_2(0) = -5, \end{array} \right. 10) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + 5x_2(t) - 5u(t), \quad x_1(0) = 12, \\ \dot{x}_2(t) = -5,6x_1(t) - 8x_2(t) + 4u(t), \quad x_2(0) = -8, \end{array} \right. \\
y(t) = x_1(t) + x_2(t); \quad y(t) = 7x_1(t) + 5x_2(t); \\
11) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 5x_2(t) - 10u(t), \quad x_1(0) = 3, \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - 6x_2(t) + 4u(t), \quad x_2(0) = -5, \end{array} \right. 12) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 5x_2(t) - 5u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -3,6x_1(t) - 7x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 6, \end{array} \right. \\
y(t) = x_1(t) + x_2(t); \quad y(t) = 6x_1(t) + 5x_2(t); \\
13) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -7x_1(t) + 5x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -3,6x_1(t) + 2x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = -9, \end{array} \right. 14) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 6x_1(t) + 4x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -17,5x_1(t) - 11x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 7, \end{array} \right. \\
y(t) = 6x_1(t) - 5x_2(t); \quad y(t) = 5x_1(t) + 2x_2(t); \\
15) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) + 4x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -13,5x_1(t) - 10x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = -6, \end{array} \right. 16) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 4x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = -3, \end{array} \right. \\
y(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t); \quad y(t) = x_1(t) - 4x_2(t); \\
17) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t) - 5u(t), \quad x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = -7x_1(t) - 8x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = 9, \end{array} \right. 18) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2(t) = 0,5x_1(t) - 2x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 8, \end{array} \right. \\
y(t) = 7x_1(t) + 4x_2(t); \quad y(t) = x_1(t) + 4x_2(t); \\
19) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) - 4x_2(t) - 4u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -0,5x_1(t) - 2x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = 5, \end{array} \right. 20) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) - 4x_2(t) + 8u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -0,5x_1(t) - 4x_2(t) - 2u(t), \quad x_2(0) = -6, \end{array} \right. \\
y(t) = x_1(t) + 2x_2(t); \quad y(t) = x_1(t) + 4x_2(t); \\
21) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = 7x_1(t) - 9x_2(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = 5, \end{array} \right. 22) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -5x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = -7, \end{array} \right. \\
y(t) = -7x_1(t) + 4x_2(t); \quad y(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t); \\
23) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) - 4x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 7, \\ \dot{x}_2(t) = 17,5x_1(t) - 12x_2(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = 5, \end{array} \right. 24) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -5x_1(t) + 4x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = -5, \end{array} \right. \\
y(t) = 7x_1(t) - 4x_2(t); \quad y(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t); \\
25) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 5x_1(t) + 4x_2(t) - 8u(t), \quad x_1(0) = 5, \\ \dot{x}_2(t) = -17,5x_1(t) - 12x_2(t) + 14u(t), \quad x_2(0) = 10, \end{array} \right. 26) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) + 4x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 15, \\ \dot{x}_2(t) = -13,5x_1(t) - 11x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 9, \end{array} \right. \\
y(t) = 7x_1(t) + 4x_2(t); \quad y(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t); \\
27) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 4x_1(t) + 2x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 10, \\ \dot{x}_2(t) = -27x_1(t) - 11x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 7, \end{array} \right. 28) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 20, \\ \dot{x}_2(t) = -20x_1(t) - 10x_2(t) - 10u(t), \quad x_2(0) = 5, \end{array} \right. \\
y(t) = 3x_1(t) + x_2(t); \quad y(t) = 5x_1(t) + 2x_2(t); \\
29) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 15, \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 4x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 9, \end{array} \right. 30) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 15, \\ \dot{x}_2(t) = -5x_1(t) + 8u(t), \quad x_2(0) = 6, \end{array} \right. \\
y(t) = x_1(t) - 2x_2(t); \quad y(t) = x_1(t) + x_2(t);
\end{array}$$

Рекомендована література

- 1.Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1989.- 752 с.
- 2.Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями,- М.: Мир, 1986.- 246 с.
- 3.Гельднер К., Кубик С. Нелинейные системы уравнения.- М.: Мир, 1986.- 368 с.
- 4.Барбашин Е.А. Функции Ляпунова.- М.: Наука, 1970.- 96 с.
- 5.Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.- М.: Наука. 1967.- 472 с.
- 6.Заде Л.» Дезоэр Ч. Теория линейных систем. Методы пространства состояний. - М.: Наука, 1970.- 704 с.
- 7.Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления.-М.: Наука. 1970.-6 20 с.
- 8.Квакернак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир. 1977.-620 с.
- 9.Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения.- М.: Наука, 1976.-320 с.
- 10.Самойленко А.М., Кривошей С.А. Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи.- М.: Высш.шк., 1969.- 388 с.
- 11.Мороз А.И.- Курс теории систем.- М.:Высш. шк. 1987.- 304 с.