МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ «ОСНОВИ ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗАЦІЇ» (МОДУЛЬ «НАДІЙНІСТЬ І ДІАГНОСТУВАННЯ») ЗА ОСВІТНІМ РІВНЕМ «БАКАЛАВР» ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ «151 АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

Затверджено на засіданні кафедри
комп'ютерно-інтегрованих
технологій та автоматизації
Протокол № 2 від 22.11.2018

Дніпро ДВНЗ УДХТУ 2019

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Основи проектування систем автоматизації» (модуль «Надійність і діагностування») за освітнім рівнем «Бакалавр» для студентів спеціальності «151 Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» / Укл. Л.Д. Чумаков. – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2019. – 28 с.

Укладач Л.Д. Чумаков, д-р техн. наук

Відповідальний за випуск О.П. Мисов, канд. техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни
«Основи проектування систем автоматизації» (модуль «Надійність
і діагностування») за освітнім рівнем «Бакалавр» для студентів
спеціальності «151 Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»

Укладач ЧУМАКОВ Лев Дмитрович

Технічний редактор Л.Я. Гоцуцова
Комп’ютерна верстка Л.Я. Гоцуцова

Підписано до друку 16.05.19. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різограф. Умов. друк. акр. 1,37. Облік.-вид. акр. 1,32. Тираж 100 прим. Зам. № 220. Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015.

ДВНЗ УДХТУ, 49005, м. Дніпро – 5, просп. Гагаріна, 8.

Редакційно-видавничий відділ

ЗМІСТ

ВСТУП

У всі часи майстер при виготовленні об'єкта своєї діяльності прагнув забезпечити високий рівень його якості. Розвиток техніки призвів до того, що створювалися все більш складні пристрої. Зі збільшенням складності техніки загострилася проблема забезпечення її надійності.

Особливо актуальною вона стала при створенні складних систем озброєння, до яких пред'являлися підвищені вимоги щодо їх ефективності.

На початку п'ятдесятих років минулого сторіччя питаннями надійності електронного обладнання стали займатися інженери і математики, які були пов'язані з дослідженнями складних військових і промислових комплексів.

Одними з перших зіткнулися з серйозною проблемою ненадійності електровакуумних приладів комерційні авіакомпанії [1].

Вони створили організацію ARINC, яка займалася збором електровакуумних приладів, що відмовили, і повертала їх на заводи-виробники. В результаті були досягнуті значні успіхи в підвищенні рівня надійності великої кількості типів електровакуумних приладів.

До кінця 1952 року міністерство оборони США утворило консультативну групу з надійності радіоелектронного устаткування, перший звіт якої був опублікований у середині 1957 року.

Велика увага приділялася дослідженням закономірностей настання відмов.

Досліджувалися також форми організації підрозділів з надійності в фірмах, що займались розробкою і виготовленням складних технічних систем (ТС). Розроблялися методи оцінки та підтвердження рівня їх надійності.

У даний час теорія надійності складних ТС розвивається в напрямках застосування для вирішення практичних завдань сучасного математичного апарату, дослідження фізичних та хімічних процесів, що відбуваються при роботі елементів і вузлів систем, раціональної організації процесів проектування, виготовлення та експлуатації складних ТС [2-6, 8, 9].

Вивчення предмета повинно допомогти студентам ефективно застосовувати сучасні досягнення теорії й практики надійності.

Для закріплення знань, які одержані на лекціях, проводяться практичні заняття. На них виконуються розрахунки кількісних показників надійності невідновлюваних і відновлюваних пристроїв, приблизний, орієнтовний та остаточний розрахунки показників надійності резервованих за різними способами систем.

1 РОЗРАХУНКИ КІЛЬКІСНИХ ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ПРИСТРОЇВ, ЩО НЕ ВІДНОВЛЮЮТЬСЯ

Випадкова величина – це величина, яка в результаті експерименту може прийняти ті чи інші значення, причому заздалегідь невідомо, які саме [7].

Випадкові величини можуть бути **дискретними** і **безперервними**.

Щоб кількісно порівнювати між собою випадкові події за ступенем їх можливості, потрібно з кожною подією зв'язати певне число. Це число тим більше, чим більш можлива подія. Цим числом може бути **ймовірність** події.

Таким чином, ймовірність події є чисельна міра ступеня об'єктивної можливості цієї події.

Закон розподілу випадкової величини – всяке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Для **дискретної** випадкової величини найпростішою формою завдання закону розподілу є таблиця зі значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_1	p_2	p_3	…	p_n

Ця таблиця називається **рядом розподілу** випадкової величини.

Для неперервної випадкової величини використовується ймовірність події $X < x$, де x – деяка поточна змінна.

Ймовірність цієї події залежить від x і є функцією від x.

Ця функція називається функцією розподілу величини X і позначається $F(x)$.

Загальні властивості функції розподілу:

1. Функція розподілу $F(x)$ є неубутна функція свого аргументу, тобто при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \geq F(x_1)$.

2. На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю: $F(-\infty) = 0$.

3. На плюс нескінченності функція розподілу дорівнює одиниці: $F(\infty) = 1$.

Розглянемо ймовірність попадання випадкової величини на ділянку від x до $x + \Delta x$:

$$P(x < X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Візьмемо відношення цієї ймовірності до довжини ділянки $\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ і будемо наближати Δx до нуля:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Введемо позначення $F'(x) = f(x)$.

Функція $f(x)$ – похідна функції розподілу, характеризує щільність, з якою розподіляються значення випадкової величини в даній точці.

Ця функція називається **щільністю розподілу** випадкової величини.

Розподіли неперервної випадкової величини

Експоненціальний розподіл.

Функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ e^{-\lambda x}, \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{при } x > 0, \end{cases}$$

де λ – параметр розподілу.

Математичне сподівання:

$$M(x) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = -\lambda [\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x + 1)] \uparrow_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Коефіцієнт варіації:

$$v = 1.$$

Нормальний розподіл.

Щільність розподілу: $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a і σ – параметри розподілу.

Математичне сподівання випадкової величини x – a.

Дисперсія випадкової величини x – σ^2.

Якщо ввести функцію $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi_0(\frac{x-a}{\sigma})$, то закон розподілу можна записати наступним чином:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi_0(y)dy = F_0(\frac{x-a}{\sigma}),$$

де $F_0(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(y)dy$.

У загальному випадку величина $z = \frac{x-a}{\sigma}$ називається центрованою і нормованою, її математичне сподівання дорівнює нулю, а дисперсія дорівнює одиниці.

За допомогою функції $F_0(x)$ легко визначається ймовірність попадання випадкової величини в будь-який інтервал від A до B:

$$\alpha = \int_A^B \varphi(x)dx = F(B) - F(A) = F_0(\frac{B-a}{\sigma}) - F_0(\frac{A-a}{\sigma}).$$

Тут потрібно мати на увазі правило знаків

$$F_0(-x) = 1 - F_0(x).$$

Якщо $A \le a \le B$, то

$$\alpha = F_0(\frac{B-a}{\sigma}) + F_0(\frac{a-A}{\sigma}) - 1.$$

Усічений нормальний розподіл

Цей розподіл виходить з нормального шляхом обмеження інтервалу зміни випадкової величини.

Задаймо щільність розподілу наступним чином:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x < a \text{ і } x > b, \\ \dfrac{c}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \text{при } x \ge a \text{ і } x \le b. \end{cases}$$

Множник знаходиться з умови $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Якщо $a = 0$ і $b = \infty$, то

$$c = \frac{1}{F_0(\frac{x_0}{\sigma})}, \quad F(x) = 1 - \frac{F_0(\frac{x_0 - x}{\sigma})}{F_0(\frac{x_0}{\sigma})}.$$

Розрахунки показують, що при $x_0 > 3\sigma$, коефіцієнт $c \approx 1$.

Математичне сподівання для випадку $a = 0$ і $b = \infty$:

$$M(x) = \int_0^\infty \frac{cx}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Після перетворень:

$$M(x) = x_0 + \sigma f_1(\frac{x_0}{\sigma}), \text{ де } f_1(k) = \frac{\varphi_0(k)}{F_0(k)}.$$

Значення $f_1(k)$ є у таблицях, наведених у літературних джерелах.

Розрахунки показують, що при $x_0 > 3\sigma$, значення $\sigma(x)$ мало відрізняються від σ, а значення $M(x)$ – від x_0.

Логарифмічно нормальний розподіл

Якщо логарифм випадкової величини розподілений за нормальним законом, то закон розподілу цієї випадкової величини називається логарифмічно нормальним.

Щільність розподілу:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \text{ де } x = lg\, y,$$

$$f(y)=\frac{M}{y\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\lg y-\lg y_0)^2}{2\sigma^2}}, \text{ де } \lg y_0 = x_0.$$

M = 0,4343 – коефіцієнт переходу від натуральних логарифмів до десяткових.

Функція розподілу

$$F(y)=F_0(\frac{\lg y-\lg y_0}{\sigma}).$$

Значення моментів можна знайти в літературних джерелах.

Гамма-розподіл

Щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ cx^{\alpha-1}e^{-\beta x}, \text{при } x > 0. \end{cases}$$

де α і β – параметри розподілу.

Постійне *c* знаходиться з рівняння:

$$c\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx=1,$$

звідки

$$c=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}, \text{ де } \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

При α = 1 гамма-розподіл – це експоненціальний розподіл.

Математичне сподівання $M(x)=\frac{\alpha}{\beta}$.

Середньоквадратичне відхилення $\sigma(x)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$.

Коефіцієнт варіації $v=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Розподіл Вейбулла.

Щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0, \\ \alpha c x^{\alpha-1}e^{-x^\alpha}, \text{при } x > 0, \end{cases}$$

де α і c – параметри розподілу.

Математичне сподівання

$$M(x) = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}{c^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Дисперсія:

$$D(x) = \frac{\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\alpha})}{c^{\frac{2}{\alpha}}}.$$

Основні показники безвідмовності ТС

Ймовірність безвідмовної роботи

Зазвичай вважають, що час роботи елемента ξ до відмови – випадкова величина з функцією розподілу $F(t) = P(\xi < t)$.

Величина $P(\xi \geq t)$ називається ймовірністю безвідмовної роботи.

Найчастіше в якості напрацювання виступає час (в годинах, роках). Однак є пристрої, в яких час – не є основним показником.

Так у комутаційних пристроїв з великою кількістю перемикань (реле) в якості змінної величини напрацювання доцільно брати кількість циклів «включено-вимкнено».

Інтенсивність відмов

Імовірність відмови елемента на інтервалі $(t,\ t + \Delta t)$, за умови, що в момент t він був справний, дорівнює

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}.$$

Функція $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)} = \dfrac{-P'(t)}{P(t)}$ називається інтенсивністю відмов.

Досвід експлуатації техніки показує, що в загальному випадку графік інтенсивності відмов має три характерних ділянки.

На першій ділянці інтенсивність відмов **убуває**. Пояснюється це тим, що на початку експлуатації виявляються малонадійні елементи, відбувається доробка ТС. Цей період називають періодом **підробітки**.

На другій ділянці інтенсивність відмов **постійна**. Цей період називають періодом **нормальної експлуатації**.

На третій ділянці інтенсивність відмов **зростає**. Відбувається фізичне **старіння** елементів, і потрібно вирішувати питання про припинення експлуатації ТС.

Одним із законів розподілу, який дає можливість описати одну з трьох ділянок кривої, є закон розподілу Вейбулла.

Для закону розподілу Вейбулла справедливе співвідношення:

$$P(t) = e^{-ct^{\alpha}}.$$

Щільність розподілу випадкової величини визначається за формулою

$$f(x) = \alpha c x^{\alpha-1} e^{-cx^{\alpha}}.$$

Інтенсивність відмов при $\alpha < 1$ убуває, при, $\alpha = 1$ – постійна, при $\alpha > 1$ – зростає.

Математичне сподівання часу безвідмовної роботи визначається за формулою

$$T_0 = c^{-\frac{1}{\alpha}} \Gamma(1+\frac{1}{\alpha}).$$

Величину $\Gamma(z)$ можна визначити за таблицями або використовуючи асимптотичний розклад Стірлінга:

$$\Gamma(z) = e^{-z} z^{z-0,5} \sqrt{2\pi}[1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+O(z^{-5})].$$

Розглянемо інтервал $(t,\ t+\tau)$. Ймовірність того, що пристрій пропрацює безвідмовно час τ, якщо в момент t він був справним, дорівнює

$$P(\tau) = \frac{P(t+\tau)}{P(t)}.$$

Важливими є випадки, коли відома обмежена інформація про безвідмовність елементів.

Якщо одночасно при оцінці безвідмовності необхідно враховувати кілька руйнівних чинників, то використовують суперпозицію законів розподілу.

Вивчалися питання опису функцій розподілу моментів відмов сплайнами. Для розподілів зі зростаючою інтенсивністю відмов (ЗФІ-розподілів) є оцінка ймовірності безвідмовної роботи знизу: $P(t) > e^{-\frac{t}{T_0}}$, де T_0 – середній час безвідмовної роботи [7].

Якщо елементи поставляються різними заводами, то ймовірність безвідмовної роботи $P(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{-\lambda_k t}$, де p_k – частка, а λ_k – інтенсивність відмов елементів, що поставляються $k-м$ заводом.

Інженерів і вчених давно цікавило питання про ступінь впливу прийняття гіпотези про той чи інший вигляд функції розподілу моменту зміни технічного стану на експлуатаційні характеристики.

Дослідження показали, що при оцінці ймовірності безвідмовної роботи цей вплив може бути значним, тому розроблялися методи щодо його зниження. Часто при аналізі експлуатаційних характеристик ТС і окремих її систем виникає необхідність врахування різних режимів їх функціонування або збереження.

Одним з найбільш поширених на практиці способів такого обліку є використання значень інтенсивностей відмов елементів для окремих режимів.

Вводять також коефіцієнти, які рівні відношенню інтенсивностей відмов у різних режимах. До нашого часу складено довідники, що містять значення коефіцієнтів для типових елементів і режимів.

Спроби вирішити задачу оцінки стану елементів, що працюють у різних режимах, а також прагнення скоротити терміни проведення експериментів для отримання статистичних даних про їх відмови, призвело до виникнення і розвитку **теорії прискорених** або **форсованих** випробувань.

Седякин Н.М. в роботі [10] висловив постулат про те, що подальша поведінка технічного пристрою залежить від його стану в даний момент і не залежить від того, як він прийшов у даний стан.

Робота дала поштовх для великої кількості досліджень з підтвердження цього принципу, а також пошуку умов, при яких він є справедливим.

Серед інших моделей витрати ресурсу пристроїв у різних режимах необхідно зазначити **лінійний принцип підсумовування пошкоджень**, що запропонований Пальмгреном у 1924 році для розрахунку характеристик довговічності підшипників, а потім поширений на завдання, які пов'язані з накопиченням пошкоджень у розрахунках на втому.

Якщо історією навантаження не можна знехтувати, то використовують нелінійні закони підсумовування пошкоджень, у тому числі багатостадійні моделі [11].

Фахівці зазначають [12], що з підвищенням безвідмовності елементів конструкції радіоелектронних виробів отримання при натурних випробуваннях інформації про закономірності відмов практично неможливе.

Однак потрібно витратити значні зусилля на дослідження зв'язку характеристик процесів з параметрами законів розподілу часу перебування пристрою в тому чи іншому стані.

Так як терміни проектування техніки, особливо військового призначення, і кошти, що виділяються на розробку, обмежені, завдання ускладняються браком часу і коштів.

Одним з можливих шляхів подолання цих складнощів є створення певних базових систем, які аналізують причини типових відмов в основних робочих тілах (середовищах, матеріалах). Для цього необхідно навчитися, перш за все, правильно класифікувати робочі тіла і процеси, що відбуваються в них, конструктивні і технологічні рішення, а також типові відмови. При оцінці безвідмовності технічних пристроїв все більш широке застосування знаходять параметричні моделі відмов.

У цьому випадку задається деякий фазовий простір, який визначається умовами працездатності, в якому поставлено випадковий процес.

Досліджуються характеристики виходу випадкового процесу із заданого фазового простору.

Перевага такого підходу в аналізі безвідмовності полягає в тому, що більшою мірою враховуються конкретні умови роботи пристрою, а також надається можливість здійснювати прогноз стану на більш ранніх стадіях його створення. При оцінці безвідмовності технічних пристроїв все більш широке застосування знаходять параметричні моделі відмов.

Проблема оцінки характеристик безвідмовності технічної системи за характеристиками безвідмовності елементів вивчалася багатьма вченими.

Якщо стан системи повністю описується станом елементів, то його можна визначити, використовуючи структурну функцію системи.

Її значення обчислюються методами булевої алгебри.

Як правило, всі необхідні характеристики випадкової величини потрібно оцінювати зі спеціально організованого експерименту або систематичного спостереження в процесі експлуатації.

Як оцінити невідому функцію розподілу випадкової величини за спостереженими з досвіду її значеннями?

Як оцінити параметри розподілу випадкової величини, якщо ми спостерігаємо випадкову величину, параметри якої невідомі?

Найважливіші завдання, які доводиться вирішувати на практиці:

- оцінка невідомих параметрів;
- перевірка статистичних гіпотез;
- прийняття рішень.

Вихідним пунктом статистичного дослідження якої-небудь випадкової величини ξ є сукупність n спостережень над нею, у яких вона приймає значення $x_1, x_2, ..., x_n$.

Припускаємо, що випробування незалежні й проходять у незмінних умовах.

Варіаційний ряд, емпірична функція розподілу

Якщо послідовність результатів експерименту випадкової величини ξ з функцією розподілу *F(t)* розташувати в порядку зростання, то виходить так званий **варіаційний ряд**.

Якщо випробовувати на довговічність групу технічних пристроїв, то в результаті спостережень відразу одержуємо варіаційний ряд.

Емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq x_1^* \\ \frac{k}{n} \text{при } x_k < x \leq x_{k+1}^*. \\ 1\text{при } x \geq x_n^* \end{cases}$$

Таким чином, емпірична функція розподілу при кожному значенні *x* дорівнює числу значень випадкової величини, менших *x*, діленому на загальне число спостережень.

В 1933 році В.І. Гливенко довів важливу теорему:

$$P\{\lim_{n\to\infty} \sup_x |F(x) - F_n(x)| = 0\} = 1,$$

тобто з імовірністю, рівної 1, при $n \to \infty$, емпірична функція розподілу прямує до теоретичної.

Точкові оцінки параметрів

Таке завдання виникає, коли функція розподілу вважається відомою, і потрібно визначити значення її параметрів, а також коли необхідно оцінити числові характеристики випадкової величини.

Один з найпоширеніших підходів до рішення цього завдання є наступний.

Нехай $F(x,\theta)$ – функція розподілу випадкової величини ξ, θ – невідомий параметр. Маємо результати незалежних випробувань x_i, $i=\overline{1,n}$.

Назвемо точковою оцінкою параметра θ деяку функцію $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$, що залежить тільки від результатів випробувань і відомих величин, але не від невідомого параметра θ.

Оцінка сама є випадковою величиною й тому може змінюватися від однієї серії випробувань до іншої.

Щоб не було повної сваволі у виборі функцій φ, прагнуть, щоб вони мали деякі властивості.

Звичайно такими властивостями є:

– незсуненість;
– обґрунтованість;
– ефективність.

Оцінка $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ параметра θ називається незсуненою, якщо для неї виконується рівність

$$M\varphi = \theta .$$

Тобто математичне очікування оцінки збігається з оцінюваним параметром.

Для оцінки математичного очікування випадкової величини можна використати функцію

$$\varphi = \overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Ця оцінка є незсуненою.

При оцінці дисперсії за формулою

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

виходить зсунення

$$Ms^2 - \sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 .$$

Незсунена оцінка виходить за формулою

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 .$$

Оцінка $\varphi(x_1, x_2, ... x_n)$ параметра θ називається обґрунтованою, якщо при $n \to \infty$ оцінка сходиться за ймовірністю до оцінюваного параметра, тобто

$$P\{|\varphi - \theta| > \varepsilon\} \to 0.$$

Оцінка $\tilde{\varphi}$ називається ефективною, якщо

$$M(\tilde{\varphi} - \theta)^2 = \inf_{\varphi}(\varphi - \theta)^2.$$

Метод максимальної правдоподібності

Це один з найпоширеніших загальних методів знаходження гарних оцінок, був запропонований англійським статистиком Р. Фішером у 1912 році.

Припустимо, що випадкова величина ξ має щільність розподілу $f(x, \alpha)$.

Функція

$$L(x_1, x_2, ... x_n, \alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \alpha)$$

називається **функцією правдоподібності**.

Метод максимуму правдоподібності полягає в тому, що оцінкою α приймається його значення, при якому L досягає максимуму.

Тому що L й $\ln L$ досягають максимуму при одному і тому ж значенні α, то критичне значення α знаходиться з рівняння правдоподібності:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0.$$

Метод моментів

Цей метод запропонував К. Пірсон. Він відрізняється від методу найбільшої правдоподібності менш складною обчислювальною процедурою.

Суть його полягає в тому, що прирівнюються теоретичні й емпіричні моменти.

Метод довірчих інтервалів

Точкові оцінки є випадковими величинами. Р. Фішер запропонував указувати дві функції θ_1 й θ_2 від результатів випробувань, для яких імовірність покриття невідомого параметра відрізком (θ_1, θ_2) дорівнює заданій величині. Функції θ_1 й θ_2 називаються довірчими границями, а (θ_1, θ_2) – довірчим інтервалом для параметра θ.

Наприклад, при оцінці параметра нормального розподілу a при відомому параметрі σ виду

$$\bar{x} - \frac{z_1\sigma}{\sqrt{n}} \le a < \bar{x} + \frac{z_2\sigma}{\sqrt{n}}$$

ймовірність оцінки дорівнює

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Величина $\beta = 1 - \omega$ називається довірчим рівнем пропонованої оцінки.

Вона вказує ймовірність виходу параметра за довірчий інтервал.

ω називається коефіцієнтом довіри.

Організація випробувань

Організація і проведення випробувань – це, перш за все, вибір тих параметрів, оцінка значень яких повинна вважатися основною метою випробувань.

Цей вибір визначається, перш за все, фізичною значимістю запропонованих характеристик, а також тими вузькими місцями, які виявилися в роботі досвідчених виробів або при експлуатації колишніх випусків.

На цьому етапі основні завдання вирішують фізики, хіміки та інженери.

Математика використовується на етапі оцінки взаємозалежності обраних параметрів і обробки результатів вимірювань.

Рідко працездатність навіть простих елементів (транзистори, конденсатори та ін.) можна оцінити за одним параметром. Як правило, потрібне знання декількох величин, щоб скласти уявлення про цей елемент.

Другим важливим моментом при організації випробувань потрібно вважати вибір зовнішніх умов, у тому числі і режим роботи елементів. Вони повинні бути наближені до реальних умов експлуатації ТС.

Для оцінки характеристик надійності випробовуваних зразків необхідно вибрати план випробувань.

Введемо наступні позначення:

N – число випробуваних зразків;

$Б$ – при випробуваннях зразки, що відмовили, не замінюються новими;

B – при випробуваннях зразки, що відмовили, замінюються новими;

r – число відмов;

T – час випробувань.

План $[N, Б, N]$ часто неможливо реалізувати для зразків з високим рівнем безвідмовності, так як випробування будуть дуже тривалими.

Найбільш поширеними планами є:

$[N, Б, T]$	$[N, Б, r]$	$[N, Б, (r, T)]$
$[N, B, T]$	$[N, B, r]$	$[N, B, (r, T)]$

Випробування за планом $[N, Б, T]$ припиняються через час T.

Випробування за планом $[N, Б, r]$ припиняються, коли настануть r відмов.

Випробування за планом $[N, Б, (r, T)]$ припиняються при настанні моменту часу T, а число відмов менше r, або якщо до моменту T сталося r відмов.

При випробуваннях за планом $[N, Б, N]$ є повна інформація для побудови емпіричної функції розподілу. Вона визначається за допомогою рівності

$$F_N(x) = \frac{k}{N}$$

для значень x, $t_k \le x < t_{k+1}$.

Згідно з теоремою Глівенко з імовірністю, рівною 1, при $N \to \infty$, емпірична функція розподілу прямує до теоретичної.

Якщо використовується план $[N, Б, T]$, то значення емпіричної функції розподілу можуть бути побудовані тільки для $t \le T$.

При випробуваннях за планом $[N, Б, r]$ значення емпіричної функції розподілу визначаються тільки до рівня $\frac{r}{N}$.

Оцінкою для щільності ймовірностей може служити гістограма $p_N(t)$.

Для її побудови розбиваємо область значень змінної t на інтервали $(S_k, S_{k+1}),\ k = 1, \dots, m, \dots$ і на кожному інтервалі покласти

$$p_N(t) = \frac{d_k}{N} \frac{1}{[S_{k+1} - S_k]} \quad S_k \le t < S_{k+1},$$

де d_k – число відмов, що сталися на інтервалі $S_k \le t < S_{k+1}$.

Емпірична функція інтенсивності відмов визначається зі співвідношення:

$$\lambda_N(t) = \frac{d_i}{(S_i - S_{i-1})N(t)},$$

де $N(t)$ – число зразків, що безвідмовно пропрацювали до моменту t; d_i – число зразків, які відмовили в інтервалі $S_{i-1} \le t < S_i$.

Розглянемо кілька загальних методів отримання оцінок параметрів розподілу часу безвідмовної роботи.

<u>Методи квантилів і моментів</u>

Якщо $F(x)$ – деякий розподіл, то α-квантилем називається корінь рішення рівняння $F(x) = \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$.

Для нормального розподілу квантилі при $\alpha = 0{,}25;\ \alpha = 0{,}5;\ \alpha = 0{,}75$ рівні $x_{0,25} = a - 0{,}6745\sigma;\ x_{0,5} = a;\ x_{0,75} = a + 0{,}6745\sigma$ відповідно.

Нехай випробування проводяться за планом $[N, Б, r]$, $r > 1$. Тоді момент t_{l_i} появи l_i -ї відмови можна розглядати як емпіричний квантиль, відповідний рівню $q_i = \frac{l_i}{N},\ i = 1, 2, \dots$

Якби значення квантилів t_{q1}, t_{q2} були відомі заздалегідь, то значення параметрів α і β можна було б знайти з рівнянь

$$F(t_{q_1}, \alpha, \beta) = q_1,\ F(t_{q_2}, \alpha, \beta) = q_2.$$

Нам відомі з експерименту тільки наближені значення цих квантилів. Якщо замінити в рівнянні точні значення квантилів їх наближеними значеннями, то отримуємо

$$F(t_l,\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=\frac{l}{N},\ F(t_r,\tilde{\alpha},\tilde{\beta})=\frac{r}{N},$$

де t_l і t_r – моменти появи l-ї і r-ї відмов.

Для прикладу розглянемо розподіл Вейбулла

$$F(t,p,\theta)=1-e^{-\frac{t^p}{\theta}}.$$

Фіксуючи l-ю і r-ю відмови, отримуємо

$$1-e^{-\frac{t_l^p}{\theta}}=\frac{l}{N},\ 1-e^{-\frac{t_r^p}{\theta}}=\frac{r}{N}.$$

Вирішуючи рівняння, отримаємо оцінки для невідомих параметрів,

$$\tilde{p}=\frac{\ln\ln\frac{N}{N-r}-\ln\ln\frac{N}{N-l}}{\ln t_r-\ln t_l},\quad \tilde{\theta}=\frac{\ln\frac{N}{N-l}}{t_l^{\tilde{p}}}.$$

У разі проведення випробувань з використанням планів $[N,Б,T]$ рівняння для визначення невідомих параметрів розподілу записуються в наступному вигляді:

$$F(T_1,\alpha,\beta)=q_1,\ F(T_2,\alpha,\beta)=q_2\text{, де } T_1<T_2\le T.$$

При великих N $q_1\approx\frac{d(T_1)}{N}$ і $q_2\approx\frac{d(T_2)}{N}$. Підставляючи ці значення в попередні рівняння і вирішуючи їх, отримаємо оцінки для невідомих параметрів розподілу.

Метод моментів, як і метод квантилів, застосуємо тільки при обробці результатів випробувань, коли число відмов **досить велике**.

Нехай випробування проводяться за планом $[N,Б,T]$. Тоді умовна щільність ймовірності розподілу відмов за умови, що така відмова сталася за час випробувань T, дорівнює

$$\frac{f(t,\alpha,\beta)}{F(T,\alpha,\beta)}.$$

Для моменту k-го порядку маємо

$$\int_0^T t^k[\frac{f(t,\alpha,\beta)}{F(T,\alpha,\beta)}]dt=\varphi_k(\alpha,\beta).$$

Якщо $d(T)$ – число зареєстрованих за час T відмов, то емпіричні моменти першого і другого порядків дорівнюють відповідно

$$\frac{\sum_{i=1}^{d(T)} t_i}{d(T)} \text{ і } \frac{\sum_{i=1}^{d(T)} t_i^2}{d(T)}.$$

Підставляючи ці значення в попередні рівняння і вирішуючи їх, отримаємо оцінки для невідомих параметрів розподілу.

Оцінка параметра експоненціального розподілу

Експоненціальний розподіл $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $\lambda = \dfrac{1}{\theta}$, $t > 0$, знаходить широке застосування в практиці при оцінці показників надійності ТС.

Для нього багато завдань вдається вирішити в явній формі, отримавши відповідь у вигляді простих формул.

Часто при використанні розподілу Вейбулла, вважається відомим значення параметра p. При такому припущенні заміною часу $t' = t^p$ розподілення Вейбулла зводиться до експоненціального розподілу.

У разі використання плану $[N, B, T]$ спостерігається пуассонівський потік відмов з інтенсивністю $\Lambda = \lambda N$ протягом часу T.

Нехай $d(T)$ – число спостережуваних відмов, які сталися в моменти $t_1, ..., t_{d(T)}$.

Щільність ймовірності цієї події можна знайти в такий спосіб.

Ймовірність того, що перша відмова відбудеться в інтервалі $(t_1, t_1 + dt_1)$, дорівнює $\Lambda e^{-\Lambda t_1} dt_1$.

Умовна ймовірність того, що друга відмова відбудеться в інтервалі $(t_2, t_2 + dt_2)$ за умови настання першої відмови в інтервалі $(t_1, t_1 + dt_1)$, дорівнює $\Lambda e^{-\Lambda(t_2 - t_1)} dt_2$ і т. д.

Нарешті, умовна ймовірність того, що $d(T)$-та відмова сталася в інтервалі $(t_{d(T)}, t_{d(T)} + dt_{d(T)})$, а в інтервалі $(t_{d(T)} + dt_{d(T)}, T)$ інших відмов не було і за умови настання відмов в інтервалах $(t_1, t_1 + dt_1), ..., (t_{d(T)-1}, t_{d(T)-1} + dt_{d(T)-1})$, дорівнює $\Lambda e^{-\Lambda(t_{d(T)} - t_{d(T)-1})} dt_{d(T)} \times e^{-\Lambda(T - t_{d(T)})}$.

Ймовірність того, що всі відмови сталися в перерахованих інтервалах, дорівнює добутку, цих умовних ймовірностей, $\Lambda^{d(T)} e^{-\Lambda T} dt_1, ..., dt_{d(T)}$.

Розглянемо як функції правдоподібності такі вирази:

– щільність ймовірностей настання відмов у моменти $t_1, ..., t_{d(T)}$ $p(A_d, t_1, ..., t_{d(T)}) = \Lambda^{d(T)} e^{-\Lambda T}$;

– ймовірність безвідмовної роботи протягом часу T $P(A_0) = e^{-\Lambda T}$.

Рівняння максимальної правдоподібності буде мати вигляд:

$$\frac{\partial \ln p(A_d, t_1, ..., t_{d(T)})}{\partial \Lambda} = \frac{d(T)}{\Lambda} - T = 0 \text{, звідки}$$

$$\tilde{\Lambda} = \frac{d(T)}{T}.$$

Так як $\lambda = \Lambda N$, то оцінкою параметра λ є

$$\tilde{\lambda} = \frac{d(T)}{NT}.$$

Приклад. Параметри плану випробувань: $N = 100, T = 200$ год.

До моменту сталося 5 відмов. Тоді

$$\tilde{\lambda} = \frac{5}{100 \cdot 200} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ 1/год.}$$

2 РОЗРАХУНКИ КІЛЬКІСНИХ ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ПРИСТРОЇВ, ЩО ВІДНОВЛЮЮТЬСЯ

Розглядається елемент, який після виявлення відмови відновлюється, тобто замінюється новим елементом. Передбачається, що контроль справного стану елемента – безперервний ідеальний контроль.

Цей процес називається процесом відновлення.

Основною характеристикою процесу відновлення є випадкова величина $\nu(t)$, що дорівнює числу відмов, які відбулися за час *t*.

Величина $\nu(t)$ визначається з умови $t_{\nu(t)} < t \le t_{\nu(t)+1}$.

Розподіл $\nu(t)$: $P_n(t) = P\{(\nu(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t)$, зокрема $P_0(t) = 1 - F(t)$.

Фундаментальну роль при вивченні процесів відновлення відіграє функція відновлення, *H*(*t*), яка дорівнює середньому числу відмов, що відбулися до моменту *t*.

Вона знаходиться зі співвідношення:

$$H(t) = M\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n[F_n(t) - F_{n+1}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} nF_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

Через *H(t)* виражаються всі основні характеристики процесу відновлення.

Так, дисперсія числа відмов $\nu(t)$ дорівнює:

$$D\nu(t) = 2\int_0^{\infty} H(t-\tau)dH(\tau) + H(t) - H^2(t).$$

Середнє число відмов на інтервалі (t_1, t_2) дорівнює

$$H(t_2) - H(t_1).$$

Диференціальна характеристика *h(t) = H'(t)*.

У разі експоненціального закону розподілу $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ процес відбудови утворює найпростіший потік відмов – пуассонівський потік, і характеристики мають наступний вигляд:

$$P_n(t) = P\{\nu(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$
$$H(t) = \lambda t, \quad h(t) = \lambda.$$

Найпростіший потік відмов задовольняє одночасно трьом умовам:

- стаціонарності;
- ординарності;
- відсутності післядії.

Стаціонарність випадкового процесу (часу виникнення відмов) означає, що на будь-якому проміжку часу ймовірність виникнення відмов залежить тільки від величини проміжку, але не залежить від зсуву по осі часу.

Ординарність випадкового процесу означає, що відмови є подіями випадковими і незалежними. Ординарність потоку означає неможливість появи в один і той же момент часу більше однієї відмови.

Відсутність післядії означає, що ймовірність настання відмов протягом проміжку не залежить від того, скільки було відмов і як вони розподілялися до цього проміжку. Отже, факт відмови будь-якого елемента в системі не призведе до зміни характеристик (працездатності) інших елементів системи, якщо навіть система і відмовила через якогось елемента.

Досвід експлуатації складних ТС показує, що відмови елементів відбуваються миттєво і якщо старіння елементів відсутнє (λ = const), то потік відмов у системі можна вважати найпростішим.

Прості оцінки для *H(t)*:

$$F(t) \le H(t) \le \frac{F(t)}{1 - F(t)}.$$

Для розподілів із зростаючою функцією інтенсивності відмов (ЗФІ-розподілів) нижня оцінка для *H(t)*:

$$H(t) \le \frac{t}{T_0}.$$

На практиці інтерес має асимптотична поведінка процесу відбудови.

Для будь-якого закону розподілу *F(t)*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{T_0}.$$

Якщо відрізки часу між відмовами мають кінцеву дисперсію σ^2, то

$$H(t) \approx \frac{t}{T_0} + \frac{\sigma^2}{T_0^2} - \frac{1}{2}.$$

Якщо безперервна щільність розподілу $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{1}{T_0}.$$

Це важливе твердження відображає той факт, що з плином часу процес відновлення стає стаціонарним і його локальні характеристики перестають залежати від часу.

Випадкова величина $\nu(t)$ – число відмов за час t – асимптотичне нормальна з середнім $M\nu(t) = \dfrac{t}{T_0}$ і дисперсією $D\nu(t) = \dfrac{\sigma^2 t}{T_0^3}$.

З ймовірністю (1 – α) число відмов на великому інтервалі часу (*0, t*) буде лежати в межах

$$\frac{t}{T_0} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma\sqrt{t}}{T_0^{\frac{3}{2}}} < \nu(t) < \frac{t}{T_0} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma\sqrt{t}}{T_0^{\frac{3}{2}}},$$

де $u_{\frac{\alpha}{2}}$ знаходиться з умови $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-u_{\frac{\alpha}{2}}}^{u_{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \alpha.$

Надійність елемента на кінцевій ділянці часу

Важливим для практики завданням є визначення ймовірності того, що елемент пропрацює безвідмовно на ділянці $(t, t+\tau)$.

Ця ймовірність визначається за формулою

$$p_t(\tau) = 1 - F(t+\tau) + \int_0^t [1 - F(t+\tau - x] h(x) dx.$$

Для великих значень t

$$p_t(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_\tau^\infty [1 - F(t)] dt.$$

Математичне сподівання часу безвідмовної роботи: $T_1 = \dfrac{T_0}{2} + \dfrac{\sigma^2}{2T_0}.$

Інтенсивність відмов: $\lambda_1(t) = \dfrac{1 - F(t)}{\int_t^\infty [1 - F(t)] dt}.$

Якщо елемент старіючий, то оцінки для *p(t)*:

$$1-\frac{t}{T_0} \le p(t) \le e^{-\frac{t}{T_0}}.$$

Процес відновлення з кінцевим часом відновлення

Розглядається наступний процес. Елемент, що пропрацював випадковий час τ_1', виходить з ладу і відновлює працездатний стан протягом часу τ''. Відновлений елемент працює час τ_2' і відновлюється час τ_2'' і т. д.

Моменти $t_n' = \tau_1' + \tau_1'' + ... + \tau_{n-1}' + \tau_{n-1}'' + \tau_n'$, $n = 1, 2, ...,$ – відмови елемента, а моменти $t_n'' = \tau_1' + \tau_1'' + ... + \tau_{n-1}' + \tau_n' + \tau_n''$, $t_0'' = 0$, $n = 1, 2, ...,$ – відновлення елемента.

Будемо припускати, що всі величини τ_i' і τ'' незалежні.

Всі періоди відновлення розподілені однаково за законом

$$G(t) = P\{\tau_n'' < t\}$$

із середнім $T_2 = M\tau_n''$ і дисперсією $\sigma_2^2 = D\tau_n''$.

Визначений таким чином процес – процес відновлення з **кінцевим часом відновлення.**

Основні характеристики цього процесу:

- коефіцієнт готовності;
- напрацювання на відмову;
- середні витрати на відновлення справності;
- «витрати – надійність».

Коефіцієнт готовності

Коефіцієнт готовності $k_Г(t)$ – ймовірність того, що в момент *t* елемент знаходиться в справному стані:

$$k_Г(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t-x) h_2(x) dx,$$

де $h_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$

Під коефіцієнтом готовності часто розуміють його стаціонарне значення:

$$k_Г = \lim_{t\to\infty} k_Г(t) = \frac{1}{T_1 + T_2} \int_0^t [1 - F(x) dx = \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

Для експоненціальних законів розподілу:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad G(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

$$k_Г(t) = \frac{\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\mu + \lambda}.$$

Його стаціонарне значення:

$$k_{\Gamma} = \lim_{t \to \infty} k_{\Gamma}(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

Завдання

У табл. 2.1 наведені значення параметрів розподілу.

Таблиця 2.1

Пристрої	α_i	c_i	T_1, год.
$P_1(t)$	1	0,001	1000
$P_2(t)$	2	0,000000785	1000,257

1. Для пристрою № 1 знайти значення *H(t)* і *h(t)* для *t* = 1000 год.
2. Обчислити оцінки величин *H(t)* і *h(t)* для пристрою № 2.
3. Знайти стаціонарні значення коефіцієнта готовності для пристроїв, якщо T_1 = 20 год.
4. Побудувати графіки зміни величини коефіцієнта готовності, якщо T_2 = 10, 20, 30, 40, 50 год.

3 РОЗРАХУНКИ ХАРАКТЕРИСТИК НАДІЙНОСТІ НЕВІДНОВЛЮВАНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ОСНОВНОМУ З'ЄДНАННІ ЕЛЕМЕНТІВ

У цьому випадку система з незалежними елементами працює до першої відмови.

Під системою в даному випадку будемо розуміти будь-який пристрій, що складається з елементів, рівень надійності яких заданий.

Скажімо, що елементи у системі з'єднані послідовно в сенсі надійності, якщо відмова будь-якого елемента викликає відмову всієї системи.

Тоді для безвідмовної роботи системи протягом часу *t* потрібно, щоб кожен елемент працював безвідмовно протягом цього часу. Так як елементи незалежні в сенсі надійності, то

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t).$$

Отже, при послідовному з'єднанні елементів у системі ймовірність безвідмовної роботи системи дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи елементів.

Так як

$$p_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(x)dx},$$

то

$$P(t)=\prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(x)dx} \text{ и } \Lambda(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t).$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні елементів системи інтенсивності відмов елементів складаються.

Зокрема, при $\lambda_i(t)=\lambda_i=const$,

$$P(t)=e^{-(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)t},$$

отже, ймовірність безвідмовної роботи системи також буде відповідати експоненціальному закону.

Зокрема, коли всі елементи системи мають однаковий рівень надійності $p_i(t)=p(t)$, то

$$P(t)=[p(t)]^n, \qquad \Lambda(t)=n\lambda(t),$$

а для експоненціального закону $\Lambda=n\lambda$.

Завдання

ТС складається з 3-х елементів, що з'єднані у сенсі надійності послідовно. Час безвідмовної роботи елементів розподілено за експонентним законом. Середні часи роботи елементів: T_1 = 10000 год; T_2 = 5000 год; T_3 = 2000 год.

Визначити середній час роботи ТС.

Підібрати середні часи роботи елементів таким чином, щоб середній час роботи ТС був не менше 43800 год.

4 РОЗРАХУНКИ ХАРАКТЕРИСТИК НАДІЙНОСТІ НЕВІДНОВЛЮВАНОЇ РЕЗЕРВОВАНОЇ СИСТЕМИ

Структура системи і характер її роботи повинні бути відомі настільки, щоб для будь-якої групи елементів системи можна було визначити, чи викликає відмова всіх елементів цієї групи відмову системи чи ні.

Припустимо також, що елементи відмовляють незалежно один від одного, тобто відмова будь-якої групи елементів не змінює характеристик надійності інших елементів.

Розглянемо спочатку роботу системи до її першої відмови.

У цьому випадку показник надійності системи повністю визначається функцією надійності *P(t)*, що дорівнює ймовірності безвідмовної роботи системи протягом часу *t*.

Нехай система складається з *n* елементів, функцію надійності яких ми позначимо через $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$.

Необхідно висловити функцію надійності системи *P(t)* через функції надійності елементів.

Навантажений резерв

Резерв називається навантаженим, коли елемент знаходиться в одному і тому режимі до і після включення в роботу. Тому надійність кожного елемента не залежить від того, коли відмовили інші резервні елементи.

Будемо вважати, що елемент, що відмовив, замінюється резервним миттєво, а якщо є перемикаючий пристрій, то він не відмовляє.

Розглянемо випадок з'єднання елементів у системі з резервом.

1. Паралельне з'єднання елементів.

Скажімо, що елементи в системі з'єднані паралельно, якщо відмова системи настає тільки тоді, коли відмовляють всі вхідні в систему елементи.

Прикладом системи з такою сполукою елементів є пристрій, що складається з декількох частин, які виконують одну й ту ж функцію. Ця функція буде порушена тільки тоді, коли відмовлять всі ці частини.

Так як елементи незалежні в сенсі надійності, то

$$Q(t)=\prod_{i=1}^{n} q_i(t),$$

тобто при паралельному з'єднанні імовірності відмови перемножуються.

Зокрема, коли всі елементи рівнонадійні,

$$Q(t)=q^n(t).$$

Коли потрібно знайти число резервних елементів при заданій ймовірності безвідмовної роботи системи і заданої ймовірності безвідмовної роботи елемента, то воно може бути визначене з виразу

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{1-P(t)}}{\ln \frac{1}{1-p(t)}}.$$

Коли потрібно визначити ймовірність безвідмовної роботи елемента резервної групи при заданій ймовірності безвідмовної роботи системи, то вона може бути визначена за формулою

$$p(t)=1-\sqrt[n]{1-P(t)}.$$

<u>Експоненціальний розподіл</u>

Якщо час безвідмовної роботи елемента підпорядковується експоненціальному закону, то час безвідмовної роботи системи вже не буде підкорятися цьому закону.

Наприклад, для випадку рівнонадійних елементів

$$Q(t)=(1-e^{-\lambda t})^{n}.$$

Математичне сподівання часу безвідмовної роботи

$$T_0=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

При великому n

$$T_0 \approx \frac{1}{\lambda}(ln n + C), \text{де } C = 0{,}577.$$

Відомо, що математичне сподівання часу безвідмовної роботи елемента $T_1=\frac{1}{\lambda}$ і тоді $T_0 \approx T_1(\ln n + C)$.

Розподіл Вейбулла

Для рівнонадійних резервних елементів

$$p(t)=e^{-\lambda t^{\alpha}}.$$

Математичне сподівання часу безвідмовної роботи

$$T_0=\int_0^{\infty}[1-(1-e^{-\lambda t^{\alpha}})^{n}]dt=\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}\int_0^{\infty}e^{-\lambda k t^{\alpha}}dt=\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}k^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

або

$$T_0=T_1\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Одним з поширених способів резервування є схема «***m*** **з** ***n***».

Цей спосіб передбачає, що відмова системи відбувається, коли відмовив $m+1$ елемент.

Ймовірність безвідмовної роботи такого з'єднання

$$P_{m,n}(t)=\sum_{i=0}^{n-m}C_n^{n-i}p^{n-i}(t)[1-p(t)]^{i}.$$

Зокрема, часто використовується схема резервування «***2* з *3***».

Для нього

$$P_{2,3}(t)=\sum_{i=0}^{1}C_3^{3-i}p^{3-i}(t)[1-p(t)]^{i}=p^3(t)+C_3^2p^2(t)[1-p(t)]=$$
$$=p^3(t)+3p^2(t)[1-p(t)]=p^2(3-2p).$$

Дублювання є окремим випадком виду «***1* з *2*»**.

Ймовірність безвідмовної роботи системи при дублюванні

$$P_{1,2}(t) = \sum_{i=0}^{1} C_2^2 p^{2-i}(t)[1-p(t)]^i = p^2(t) + C_2^1 p\ (t)[1-p(t)]\ =$$
$$= p^2(t) + 2p\ (t)[1-p(t)] = p\ (2-p).$$

Завдання

Нарисувати графіки ймовірності безвідмовної роботи системи з дублюванням та системи з резервуванням «2 з 3-х» у залежності від значення ймовірності безвідмовної роботи одного елемента.

Взяти значення ймовірності безвідмовної роботи одного елемента від 0,3 до 0,9 через кожні 0,1.

Відмітити відмінності в поведінці кривих.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Commercial Aviation [Электронный ресурс] – Электрон. дан. – Режим доступа: http://www.arinc.com/sectors/aviation/aircraft_operations/commercial_aviation/, свободный – Загл. с экрана.

2. Лебедев С.А. Философия науки: // Словарь основных терминов – М. : Академический Проект, 2004. – 320 с.

3. Павлов В.В. К началу теории эргатического организма // Эргатические системы управления. – К. : Наук. думка, 1974. – С. 3-17.

4. Чумаков Л.Д. О совокупности характеристик, определяющих уровень качества эксплуатации технического устройства // Прочность и надежность сложных систем. – К. : Наук. думка, 1979. – С. 182-187.

5. Клиланд Д., Кинг В. Системный анализ и целевое управление. Пер. с англ. – М. : «Сов. Радио», 1974. – 280 с.

6. Надежность и эффективность в технике: Справочник. В 10 т. / Ред. совет: В.С. Авдуевский (пред.) и др. – М. : Машиностроение, 1990. – (В пер.). Т. 3. Эффективность технических систем / Под общ. ред. В.Ф. Уткина, Ю.В. Крючкова. – 328 с. ; ил.

7. Гнеденко Б.В. Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М. : Наука, 1965 – 524 с.

8. Чумаков Л.Д. Оптимизация стратегии контроля исправности хранящейся системы // Надежность сложных технических систем. – К. : Наук. думка, 1974 – С. 36-43.

9. Переверзєв Е.С., Чумаков Л.Д. Параметрические модели отказов и методы оценки надежности технических систем / Под ред. В.С. Будника. АН УССР. Институт технической механики. – К. : Наук. думка, 1989. – 184 с. : ил. – Библиогр.: С. 179-182. – ISBN 5-12-000536-5.

10. Седякин Н.М. Об одном физическом принципе надежности // Изв. АН СССР. – Техн. кибернет. – 1966. – № 3. – С. 80-87.

11. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.

12. Чернышов А.А. Основы надежности полупроводниковых приборов и интегральных микросхем. – М.: Радио и связь, 1988. – 256 с.