

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ З ДИСЦИПЛІНИ
«ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ»
(ЧАСТИНА 2) ЗА ОСВІТНІМ РІВНЕМ «БАКАЛАВР»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТІ «151 АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА
КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ ТЕХНОЛОГІЇ»

Затверджено на засіданні
кафедри комп'ютерно-
інтегрованих технологій та
автоматизації
Протокол № 9 від 26.06.2019

Методичні вказівки до лабораторних занять з дисципліни «Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів» (частина 2) за освітнім рівнем «Бакалавр» для студентів спеціальності «151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»/ Укл. О.В. Тітова. – Дніпро: ДВНЗ УДХТУ, 2020. – 48 с.

Укладач О.В. Тітова, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск О.П. Мисов, канд. техн. наук

Навчальне видання

Методичні вказівки до лабораторних занять з дисципліни «Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів» (частина 2) за освітнім рівнем «Бакалавр» для студентів спеціальності «151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Укладач ТІТОВА Олена Василівна

Технічний редактор В.П. Синицька
Комп'ютерна верстка В.П. Синицька

Підписано до друку 01.10.2020. Формат 60×84/16. Папір ксерокс. Друк різнограф.
Умов. друк. арк. 2,18. Обл.-вид. арк. 2,22. Тираж 100 прим. Зам. № 85.
Свідоцтво ДК № 5026 від 16.12.2015

ДВНЗ УДХТУ, просп. Гагаріна, 8, м. Дніпро, 49005

Редакційно-видавничий відділ

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1. ПРОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ В МАТНСАД. ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ І МАТРИЦЯМИ. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ.....	5
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2. РІШЕННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	16
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3. РІШЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. РІШЕННЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	21
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ. ЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ І РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ	27
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5. РІШЕННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ	34
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6. ПРОГРАМНІ МОДУЛІ В СИСТЕМІ МАТНСАД	42
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	48

ПЕРЕДМОВА

Одне із завдань ЕОМ – автоматизація інтелектуальної праці, підвищення ефективності наукових досліджень. Дотепер наукові та інженерні розрахунки залишаються одними з найважливіших сфер використання комп'ютерів.

Основна особливість ЕОМ – орієнтація на застосування користувачами, що не володіють мовами програмування. Такий підхід дозволяє подолати мовний бар'єр, що відокремлює людину від машини. З цією метою розробляються пакети прикладних програм, розраховані на широкі кола фахівців. До подібних пакетів відносяться MatLab, MathCad та ін.

Мета курсу – навчити користуватися простими методами обчислень з використанням сучасних інформаційних технологій. Найбільш відповідною для цієї мети є одна з наймогутніших і ефективніших математичних систем – MathCAD, яка займає особливе місце серед безлічі таких систем (Matlab, Maple, Mathematica та ін.).

MathCAD – це могутнє і в той же час просте універсальне середовище для вирішення завдань в різних галузях науки і техніки. MathCAD залишається єдиною системою, в якій опис рішення математичних задач задається за допомогою звичних математичних формул і знаків. MathCAD дозволяє виконувати як чисельні, так і аналітичні (символьні) обчислення, має надзвичайно зручний математико-орієнтований інтерфейс і прекрасні засоби наукової графіки.

Лабораторний практикум з курсу "Числові методи та моделювання на ЕОМ" є обов'язковим доповненням до курсу лекцій з цієї дисципліни. Курс лекцій сприяє придбанню базових знань за предметом. Практикум допомагає одержати навички роботи з пакетами прикладних програм MathCad.

Студентам пропонується освоїти програмний інструментарій у процесі виконання конкретних завдань і рішення практичних задач, що підвищує ефективність навчання.

У методичних вказівках розглянуті основні методи рішення задач чисельного аналізу і моделювання з використанням MathCad.

У лабораторних роботах надані приклади рішення різних математичних задач. Для виконання лабораторних робіт текст завдань слід брати з відповідного прикладу роботи. Варіанти індивідуальних завдань знаходяться в кінці кожної лабораторної роботи.

Лабораторна робота № 1

Прості обчислення в MathCad. Операції з векторами і матрицями.

Побудова графіків функцій

1.1 Знайомство з MathCad

Однією з основних областей застосування ПК є математичні і науково-технічні розрахунки. Складні обчислювальні завдання, що виникають при моделюванні технічних пристроїв і процесів, можна розбити на ряд елементарних: обчислення інтегралів, рішення рівнянь, рішення диференціальних рівнянь і т.д. Для таких задач вже розроблені методи рішення, створені математичні системи, доступні для вивчення студентам молодших курсів вузів.

Однією з таких систем є MathCad, який є математично орієнтованою універсальною системою. Крім власне обчислень виконуються оформлювальні завдання. Так, вони дозволяють готувати статті, книги, наукові звіти, дипломні і курсові проекти не тільки з якісними текстами, але і з доступним набором найскладніших математичних формул і вишуканим графічним представленням результатів.

Вхідна мова MathCad має деякі особливості. А саме, коли визначається який-небудь об'єкт системи, тут же виконуються вказані в блоці операції. Об'єктами системи можуть бути формульні і текстові блоки. При цьому формульні блоки можуть мати особливі ознаки — атрибути, наприклад, активності, пасивності та оптимізації.

Важливо відразу врахувати, що MathCad виконує дії над блоками в певному порядку — блоки аналізуються (оцінюються) зліва направо і зверху вниз. Це означає, що блоки не можна розташовувати в документі довільно. Блоки, що готують які-небудь операції, повинні передувати блокам, які виконують ці операції. Винятком є блоки з глобальним визначенням.

Головною відмінною рисою інтерфейсу MathCad є панель математичних інструментів. Кожна кнопка в математичній панелі інструментів відкриває палітру процедур. Призначення кнопок наведено в таблиці 1.1.

MathCad відображає формули в точності в тому вигляді, як їх друкують у книгах, тобто за всією площею екрану. MathCad підбирає розміри для дужок, дробових рис і інших математичних символів, щоб вони виглядали на екрані так, як їх звичайно пишуть на папері.

MathCad розуміє пріоритет виконання операцій. Після введення знаку рівності = MathCad показує результат. Після введення оператора MathCad показує невеликий прямокутник, названий полем введення. Поле введення містить місця для введення чисел і виразів. Введене число заміщає поле введення у виразі. Поле введення, яке з'являється в кінці рівняння, використовується для перетворень одиниць вимірювання.

Призначення кнопок математичної панелі інструментів

	Палітра розрахунків
	Палітра операцій присвоювання та виводу
	Палітра булевих операцій
	Палітра графіки
	Палітра векторів та матриць
	Палітра математичних операцій
	Палітра грецьких символів
	Палітра засобів програмування
	Палітра символічних операцій

Вираз на екрані можна редагувати, встановлюючи в потрібному місці покажчик і друкуючи нові символи, цифри або операторів.

Гнучкість і потужність MathCad стають ясними при використанні змінних і функцій. За допомогою змінних і функцій стають можливими зв'язок рівнянь і використання проміжних результатів в подальших обчисленнях.

Щоб визначити будь-яку змінну, необхідно:

- надрукувати ім'я змінної, яку треба визначити;
- надрукувати двокрапку, щоб ввести символ визначення;
- надрукувати значення, що привласнюється змінній. Значення може бути числом або складнішим поєднанням чисел і раніше певних змінних.

Введення тексту

Для того, щоб ввести текст, потрібно клацнути у вільному місці і виконати пункт Text Region з меню Insert, або натиснути Shift + “ на клавіатурі.

Області MathCad

Mathcad допускає введення формул і тексту в будь-якому місці робочого документа. Кожен математичний вираз або фрагмент тексту є областями. MathCad створює невидимий прямокутник, що містить кожну область. Робочий документ MathCad є сукупність таких областей.

Обчислення, що повторюються

MathCad може виконувати обчислення, що повторюються або ітераційні, так само легко, як обчислення окремих виразів. З цією метою MathCad використовує спеціальний тип змінних - ранжировані змінні.

Ранжирована змінна приймає заданий діапазон значень. У простому випадку для створення такою змінною використовується вираз: $x:=0..10$, де x приймає значення від 0 до 10 з кроком 1. Якщо у виразі присутня ранжирована змінна, то MathCad обчислює вираз стільки разів, скільки значень містить ця змінна.

Форматування результату

У MathCad можна встановлювати формат виведення чисел, тобто змінювати число десяткових знаків, що виводяться, міняти експоненціальний вид подання чисел на звичайний запис з десятковою крапкою і так далі. Для форматування необхідно зробити подвійне клацання по числу, та у вікні, що з'явилося, задати формат подання чисел результату. Форматування можна виконати командою Result з меню Format.

При зміні формату виведення результатів міняється тільки їх зовнішній вигляд. Внутрішнє подання чисел MathCad завжди має подвійну точність з 15 знаками в мантисі.

Побудова графіків

MathCad може будувати двовимірні графіки в декартових і полярних системах координат, картини ліній рівня, зображати поверхні і виводити ряд інших тривимірних графіків.

Для створення *декартового графіка*:

1. Встановити курсор у порожньому місці робочого документа.
2. Вибрати команду **Вставка ⇒ Графік ⇒ X-Y графік, або натиснути комбінацію клавіш Shift + @**, або клацнути кнопку  панелі **Графіки**. З'явиться шаблон декартового графіка.

3. Введіть у середній мітці під віссю абсцис першу незалежну змінну, через кому – другу і так до 10, наприклад $x1, x2$.

4. Введіть у середній мітці зліва від вертикальної осі ординат першу незалежну змінну, через кому – другу і т. д., наприклад $y1(x1), y2(x2)$, або відповідні вирази.

5. Клацніть за межами області графіка, що б почати його побудову.

При побудові **тривимірних графіків** у ранніх версіях MathCAD, поверхню потрібно було визначити математично. Тепер застосовують функцію MathCAD *CreateMesh*.

CreateMesh(*F* (або *G*, або *f1, f2, f3*) *x0, x1, y0, y1, xgrid, ygrid, fmap*) – створює сітку на поверхні, певною функцією *F*. $x0, x1, y0, y1$ – діапазон зміни змінних, *xgrid, ygrid* – розміри сітки змінних, *fmap* – функція відображення. Всі параметри, за винятком *F*, – факультативні. Функція *CreateMesh* за умовчанням створює сітку на поверхні з діапазоном зміни змінних від -5 до 5 і з сіткою 20x20 точок. Приклад використання функції *CreateMesh* для побудови 3D-графіків наведений у лабораторній роботі, де побудована одна і та ж поверхня різними способами, з різним форматуванням, причому зображені поверхні і під ними ті ж поверхні у вигляді контурного графіка. Така побудова здатна додати рисунку більшу наочність.

Нерідко поверхні і просторові криві показують у вигляді крапок, кружечків або інших фігур. Такий графік створюється операцією **Вставка ⇒ Графік ⇒ 3D Точковий**, причому поверхня задається параметрично – за допомогою трьох матриць (X, Y, Z), а не однієї як в попередньому прикладі. Для

визначення початкових даних для такого виду графіків використовується функція *CreateSpace*.

CreateSpace (*F* *t0*, *t1*, *tgrid*, *fmap*) – повертає вкладений масив трьох векторів, що надають *x*-, *y*-, і *z* - координати просторової кривої, визначеної функцією *F*. *t0* і *t1* – діапазон зміни змінної, *tgrid* – розмір сітки змінної, *fmap* – функція відображення. Всі параметри, за винятком *F*, – факультативні.

Побудова пересічних фігур

Особливий інтерес є можливість побудови на одному графіку ряду різних фігур або поверхонь з автоматичним врахуванням їх взаємного перетину. Для цього треба роздільно задати матриці відповідних поверхонь і після виведення шаблону 3D-графіка перерахувати ці матриці під ним з використанням як роздільника коми.

Прості операції

При роботі з математичними операторами використовуються знаки складання (+), віднімання (-), множення (*), ділення (/), зведення в ступінь (^) та ін., приведені в табл. 1.2. В таблиці показані послідовності набору клавіш і відповідні математичні формули на екрані.

Таблиця 1.2

«Гарячі клавіші» в MathCad 12

Операція	Позначення	Клавіші	Призначення
Нижній індекс	A_n	[	Завдання індексованої змінної
Верхній індекс	$A^{<n>}$	[Ctrl]^	Вибір <i>n</i> - го стовпця з масиву <i>A</i>
Векторизація	$\vec{X}$	[Ctrl]-	Виконання операції для всіх елементів <i>X</i>
Факторіал	$n!$	[Shift]!	Розрахунок факторіалу для цілого невід'ємного числа <i>n</i>
Зведення в ступінь	X^Y	^	Підносить <i>X</i> до ступеня <i>Y</i>
Квадратний корінь	$\sqrt{Z}$	\	Обчислення квадратного кореня з <i>Z</i>
Корінь <i>n</i> -го ступеня	$\sqrt[n]{Z}$	[Ctrl]\	Обчислення кореня ступеня <i>n</i> з <i>Z</i>
Круглі дужки	(<i>X</i>)	'	Зміна пріоритету виконання операцій
Складання	$X + Y$	+	Складання скалярів, векторів або матриць
1	2	3	4
Віднімання	$X - Y$	—	Віднімання скалярів, векторів або матриць
Добуток	$X \cdot Y$	*	Обчислення добутку <i>X</i> на <i>Y</i> , якщо <i>X</i> і <i>Y</i> – скаляри. Обчислення скалярного добутку, якщо <i>X</i> і <i>Y</i> – вектори. Множення матриць, якщо <i>X</i> і <i>Y</i> – подібні матриці
Ділення	X / Y	/	Ділення виразу <i>X</i> на скаляр <i>Y</i> , не рівний нулю

Продовження табл. 1.2

1	2	3	4
Сума вектора	$\sum v$	[Ctrl]4	Сума елементів вектора v
Сума ряду	$\sum_{i=k}^n X$	[Ctrl] [Shift]4	Обчислення суми X для i=k,k+1,...,n причому X може бути будь-яким виразом
Добуток рядка	$\prod_{i=k}^n X$	[Ctrl] [Shift]3	Обчислення добутку X для i=k,k+1,..., n причому X может бути будь-яким виразом
Сума нескінченного рядка	$\sum_i X$	[Shift]4	Обчислення суми нескінченного ряду X
Добуток нескінченного рядка	$\prod_i X$	[Shift]3	Обчислення добутку нескінченного ряду X
Визначений інтеграл	$\int_a^b f(x)dx$	[Shift]7	Обчислення визначеного інтегралу від функції f(x) на інтервалі [a,b]
Невизначений інтеграл	$\int f(x)dx$	[Ctrl]I	Обчислення в символьному виді невизначеного інтеграла від функції f(x)
Похідна	$\frac{d}{dx} f(x)$	[Shift]?	Обчислення першої похідної функції f(x) за змінною x
Межа	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	[Ctrl]L	Обчислення межі функції f(x) при x прагнучому до a

1.2 Методика виконання лабораторної роботи

1.2.1 Необхідно виконати розрахунки за прикладом наведеним нижче

1. Найпростіші розрахунки

$$78 \cdot 56 = 4.368 \times 10^3$$

$$g := 78 \quad f := 56 \quad d := g \cdot f \quad d = 4.368 \times 10^3$$

$$t := \frac{g}{f} \quad t = 1.393$$

$$\ln(56) = 4.025$$

$$\sin(30 \text{ deg}) = 0.5$$

Якщо кут вимірюється в градусах

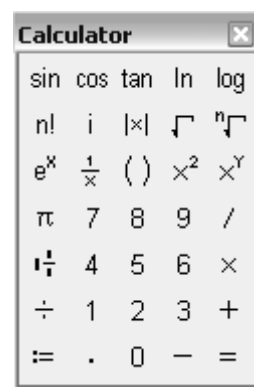
$$\sin(0.524) = 0.5$$

Якщо кут вимірюється в радіанах

$$\sin(20)^2 + \cos(20)^2 = 1$$

$$2\pi = 6.283185307179586$$

Змінити подання результату розрахунку



1.2.2 Необхідно виконати розрахунки за прикладом наведеним нижче у відповідності з варіантом

2. Операції з векторами та матрицями

ORIGIN := 1 Зміна значення індексу першого елемента масиву з 0 на 1

i := 1..5

v_i :=

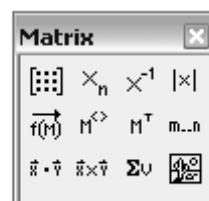
{Для того, щоб ввести вектор v потрібно набрати з клавіатури v[i [shift+ж]1,3,5,9,10,89 }

1
3
5
9
10

Початковий вектор

s := 54·v

$$s = \begin{pmatrix} 54 \\ 162 \\ 270 \\ 486 \\ 540 \end{pmatrix}$$



$$s_4 = 486$$

$$s_1 = 54$$

$$\underline{m} := \begin{pmatrix} 54 & 11 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 45 & 78 & 15 & -5 \\ -95 & 86 & 1 & 23 & 32 \\ 62 & 78 & 87 & 42 & 24 \\ 19 & 113 & 44 & 55 & 2 \end{pmatrix}$$

Початкова матриця

$$|m| = 4.425 \times 10^8$$

Детермінант матриці m

$$m^T = \begin{pmatrix} 54 & 3 & -95 & 62 & 19 \\ 11 & 45 & 86 & 78 & 113 \\ 1 & 78 & 1 & 87 & 44 \\ 2 & 15 & 23 & 42 & 55 \\ 6 & -5 & 32 & 24 & 2 \end{pmatrix}$$

$$m^{-1} = \begin{pmatrix} 0.014 & -2.58 \times 10^{-4} & -2.505 \times 10^{-3} & -3.377 \times 10^{-4} & 8.592 \times 10^{-4} \\ 0.035 & 0.017 & 9.41 \times 10^{-3} & -0.018 & 3.792 \times 10^{-3} \\ -7.06 \times 10^{-3} & 0.01 & -1.141 \times 10^{-3} & 5.912 \times 10^{-3} & -6.509 \times 10^{-3} \\ -0.071 & -0.043 & -0.018 & 0.031 & 0.016 \\ -3.814 \times 10^{-4} & -0.017 & 0.011 & 0.025 & -0.019 \end{pmatrix}$$

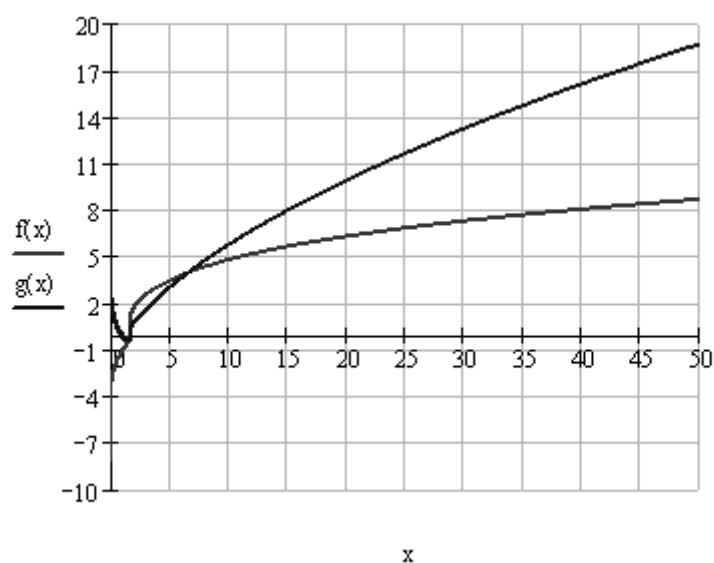
$$m \cdot m^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Побудова графіків функцій

$$x := 0, 0.001 \dots 50$$

$$f(x) := \ln(x) + \sqrt[5]{x^2 - 3}$$

$$g(x) := \ln(x) \cdot \sqrt[5]{x^2 - 3}$$

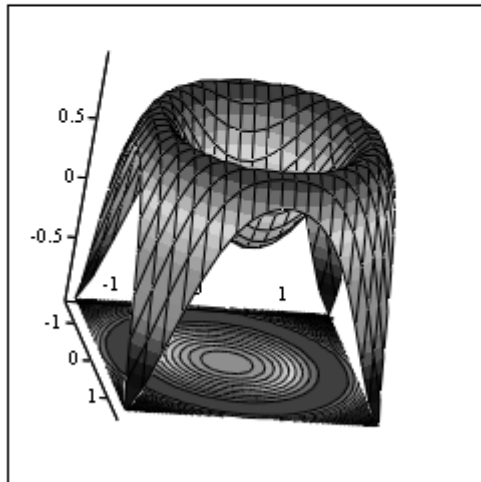


ORIGIN := 0
 ~~~~~

### Спочіб 1

$$f(x,y) := \sin(x^2 + y^2)$$

M := CreateMesh(f, -1.5, 1.5, -1.5, 1.5, 20, 20)



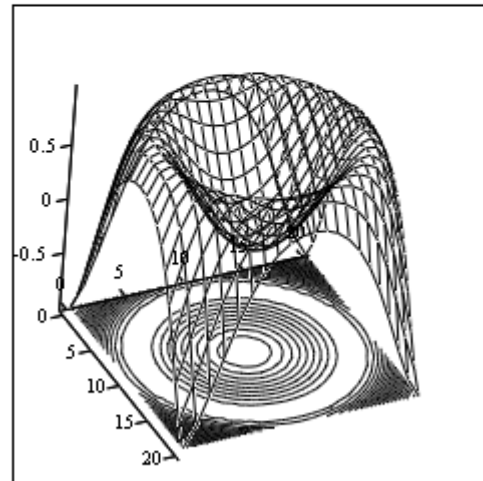
M, M

### Спочіб 2

$$i := 0..20 \quad x_i := -1.5 + i \cdot 0.15$$

$$j := 0..20 \quad y_j := -1.5 + j \cdot 0.15$$

$$M1_{i,j} := f(x_i, y_j)$$

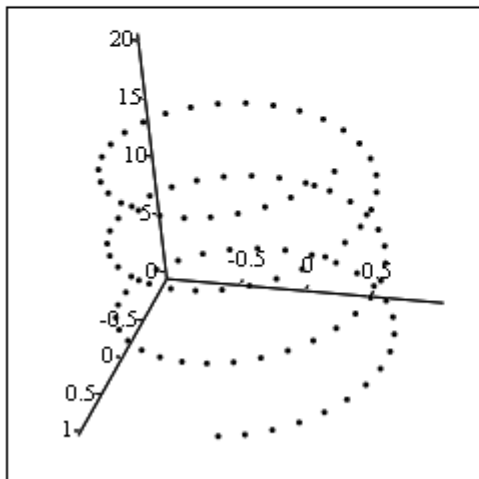


M1, M1

### Спочіб 1

$$F(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

M := CreateSpace(F, 0, 20, 100)

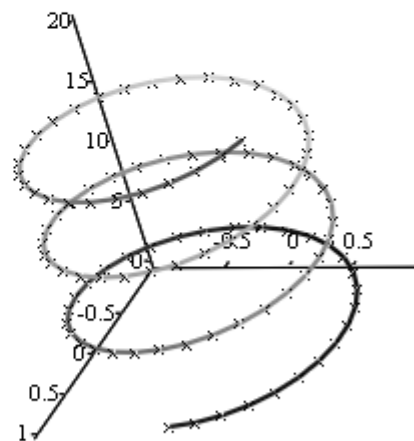


M

### Спочіб 2

$$t := 0..100$$

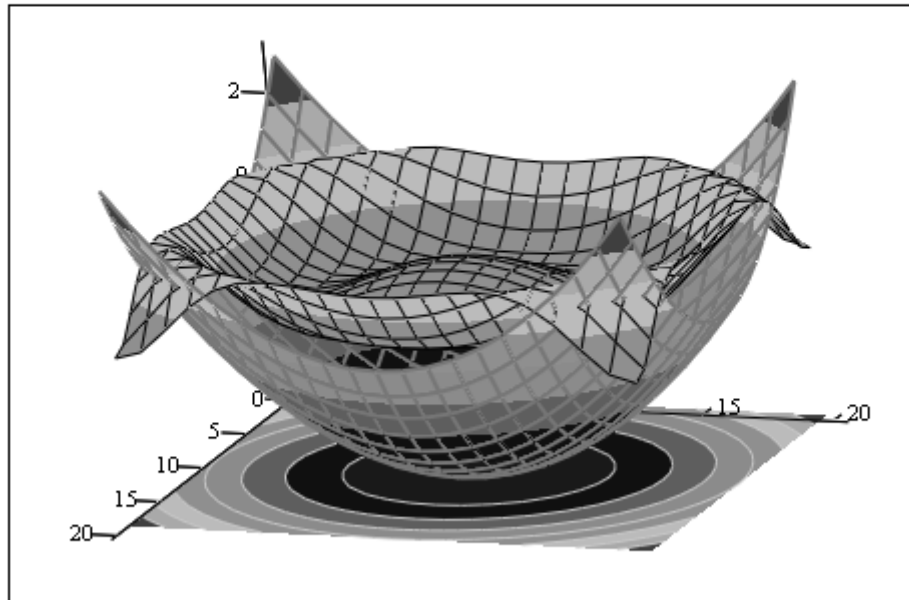
$$x_t := \cos\left(\frac{t}{5}\right) \quad y_t := \sin\left(\frac{t}{5}\right) \quad z_t := \frac{t}{5}$$



(x, y, z)

$$f1(x,y) := -\sin(x^2 + y^2) \quad f2(x,y) := x^2 + y^2 - 5 \quad x := 0..20 \quad y := 0..20$$

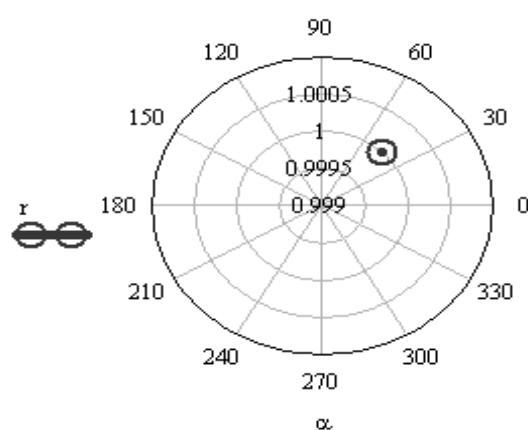
$$M1_{x,y} := f1\left(\frac{x-10}{5}, \frac{y-10}{5}\right) \quad M2_{x,y} := f2\left(\frac{x-10}{5}, \frac{y-10}{5}\right)$$



M1,M2,M2

$$r := 1$$

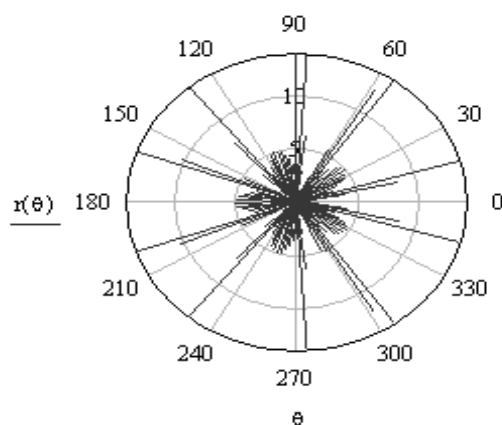
$$\alpha := \frac{\pi}{4}$$



Побудова точки з координатами  $r$  та  $\alpha$  в полярній системі координат

| Greek      |            |            |            |               |            |
|------------|------------|------------|------------|---------------|------------|
| $\alpha$   | $\beta$    | $\gamma$   | $\delta$   | $\varepsilon$ | $\zeta$    |
| $\eta$     | $\theta$   | $\iota$    | $\kappa$   | $\lambda$     | $\mu$      |
| $\nu$      | $\xi$      | $\omicron$ | $\pi$      | $\rho$        | $\sigma$   |
| $\tau$     | $\upsilon$ | $\phi$     | $\chi$     | $\psi$        | $\omega$   |
| $\Lambda$  | $\Bbbk$    | $\Gamma$   | $\Delta$   | $\text{E}$    | $\text{Z}$ |
| $\text{H}$ | $\Theta$   | $\text{I}$ | $\text{K}$ | $\Lambda$     | $\text{M}$ |
| $\text{N}$ | $\Xi$      | $\text{O}$ | $\text{P}$ | $\Sigma$      |            |
| $\text{T}$ | $\Upsilon$ | $\Phi$     | $\text{X}$ | $\Psi$        | $\Omega$   |

$$r(\theta) := \sin(5\theta) \tan(51\theta)$$



Побудова графіка в полярній системі координат

### 1.3 Варіанти індивідуальних завдань

1.3.1. Виконати пункт 1.2.2 у відповідності з такими початковими даними:

$$m = \begin{vmatrix} 1-a & 2-a & 3-a & 4-a \\ 5-a & 6-a & 7-a & -8-a \\ 8-a & 7-a & 6-a & -5-a \\ 4-a & -3-a & -2-a & 1-a \end{vmatrix} \quad v = \begin{vmatrix} 1-a \\ 2-a \\ 3-a \\ 4-a \end{vmatrix}$$

де  $a = 0,01 \cdot K$ ;  $K$  – номер за списком групи.

1.3.2 Побудувати графік функції в декартовій системі координат у відповідності з варіантом. Варіанти завдань наведені в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

Варіанти індивідуальних завдань до виконання пункту 1.3.2

| №<br>варіанта | Рівняння                     | Інтервал              | №<br>варіанта | Рівняння                     | Інтервал            |
|---------------|------------------------------|-----------------------|---------------|------------------------------|---------------------|
| 1             | $e^x + x = 0$                | $(-16; 2), h=1$       | 16            | $3x^3 - 3x^2 - 3 = 0$        | $(0; 2), h=0.25$    |
| 2             | $e^{-x} - \ln x = 0$         | $(1; 2), h=0.1$       | 17            | $x^2 - \cos x = 0$           | $(0; 2), h=0.25$    |
| 3             | $\sin x - \frac{1}{x} = 0$   | $(1; -1.5), h=0.25$   | 18            | $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$        | $(0; 2), h=0.25$    |
| 4             | $\cos x - \frac{1}{x+2} = 0$ | $(-5; -2.5), h=0.25$  | 19            | $\cos(x-1) - 3x + 2 = 0$     | $(0; 2), h=0.25$    |
| 5             | $\cos x + \frac{1}{x+2} = 0$ | $(-10; -3.5), h=0.5$  | 20            | $\cos x + \frac{1}{x-2} = 0$ | $(0; 1.5), h=0.25$  |
| 6             | $x^3 + x - 3 = 0$            | $(-1; 2), h=0.25$     | 21            | $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$    | $(-1; 0.5), h=0.25$ |
| 7             | $x^3 + x^2 - 3 = 0$          | $(-1; 2), h=0.25$     | 22            | $4x^2 - \cos x - 4 = 0$      | $(-2; 0.5), h=0.25$ |
| 8             | $e^x + 2x = 0$               | $(-1; 0), h=0.1$      | 23            | $2x^3 + 2x - 1 = 0$          | $(0; 1), h=0.1$     |
| 9             | $x^2 + \sin 2x - 2 = 0$      | $(-2; -1), h=0.1$     | 24            | $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$         | $(0; 1), h=0.1$     |
| 10            | $\cos x - \frac{1}{x-2} = 0$ | $(-2; -1), h=0.1$     | 25            | $\lg x + x = 0$              | $(0.1; 1.1), h=0.1$ |
| 11            | $x^3 - x^2 + 3 = 0$          | $(-2; -1), h=0.1$     | 26            | $e^{-x} + 2 \sin x = 0$      | $(0.5; 5), h=0.5$   |
| 12            | $\ln x + x = 0$              | $(0.1; 2.1), h=0.1$   | 27            | $x - \frac{1}{x^2 + 1} = 0$  | $(0; 1), h=0.1$     |
| 13            | $x^3 + x^2 + 3 = 0$          | $(-2; -1), h=0.1$     | 28            | $x + \frac{1}{x^2 + 1} = 0$  | $(-1; 0), h=0.1$    |
| 14            | $x^3 + 2x^2 + 3x = 0$        | $(-1.5; 0.5), h=0.25$ | 29            | $x^3 + x^2 + 2 = 0$          | $(-2; -1), h=0.1$   |
| 15            | $x^2 - \cos x = 0$           | $(-1.5; 0.5), h=0.25$ | 30            | $x^3 - x^2 - 2 = 0$          | $(1; 2), h=0.1$     |

#### 1.4 Зміст звіту про роботу

Звіт оформлюється в зошиті або на аркушах формату А4. Звіт про лабораторну роботу повинен містити наступні пункти:

- найменування роботи;
- хід роботи;
- висновки.

## **Лабораторна робота № 2**

### **Рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь**

#### *2.1 Короткий опис методів рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь*

##### *2.1.1 Метод Гауса*

Цей метод іноді називають методом послідовного виключення невідомих. Суть методу полягає в тому, що в результаті елементарних дій над рядками системи рівнянь матриця з коефіцієнтів при невідомих перетворюється до трикутного виду.

В MathCad 12 це можна виконати за допомогою вбудованої функції  $\text{rref}(A)$ .

В такій матриці коефіцієнти нижче головної діагоналі рівні нулю. Перетворення матриці коефіцієнтів системи рівнянь до трикутного виду складає «прямий» хід методу.

##### *2.1.2 Метод Крамера*

У відповідності з цим методом корені системи лінійних рівнянь знаходяться за формулами:

$$X_I = \frac{|A_I|}{|A|}, \quad \text{де } I = 1, 2, 3 \dots \quad (2.1)$$

де

$|A_I|$  - допоміжний детермінант (отриманий з головного, заміною І-го стовпця на стовпець вільних членів)

$|A|$  - головний детермінант (складений з коефіцієнтів при невідомих).

##### *2.1.3 Матричний метод*

Рішення системи лінійних рівнянь матричним методом зводиться до знаходження зворотної матриці  $A^{-1}$  та наступного перемножування зворотної матриці та вектора стовпця правих частин.

$$x = A^{-1} \cdot B. \quad (2.2)$$

##### *2.1.4 Метод простої ітерації*

Запишемо вихідну систему рівнянь у матричній формі:

$$Ax = B \quad (2.3)$$

та перетворимо її до виду:

$$x = CX + F. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) є розрахунковою для методу ітерацій, якщо виконується умова збіжності ітераційного процесу. Для того щоб ітераційний процес був збіжним будь-яка з норм матриці  $C$  повинна бути менше 1:

$$\|C\| < 1.$$

Для того, щоб ітераційний процес був збіжним необхідно з вихідної системи виразити ті невідомі, коефіцієнти при яких будуть більше суми модулів інших коефіцієнтів у рівнянні. Ітераційний процес продовжують до тих пір поки не виконається умова:

$$|X_i^{k+1} - X_i^k| \leq \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  - задана точність рішення;

$X_i^k$  - k-е наближення рішення для i-го кореня;

$X_i^{k+1}$  - (k+1)-е наближення рішення для i-го кореня.

### 2.1.5 Рішення за допомогою вбудованих функцій MathCad 12

**Isolve (A,B)** – повертає вектор  $x$  для системи лінійних рівнянь (2.3) при заданій матриці коефіцієнтів **A** та векторі вільних членів **B**.

Системи лінійних і нелінійних рівнянь і нерівностей дозволяють вирішувати на **Mathcad** блок **given** у поєднанні з функцією **Find**.

У блоці **given** записується система рівнянь і/або нерівностей, що підлягають рішення. Система рівнянь і/або нерівностей повинна бути записана нижче або правіше за слово **given**.

При записі рівнянь замість знаку = слід набирати **Ctrl+=**. Перед словом **given** необхідно указувати початкові наближення для всіх змінних. Блок **given** не придатний для пошуку індексованих змінних.

Якщо ми хочемо знайти комплексний корінь, слід задавати комплексне початкове наближення.

Ознакою закінчення системи слугує функція **Find**.

Функція **Find** повинна мати стільки ж або менше аргументів, скільки рівнянь і нерівностей містить блок **given**. Якщо виявиться, що блок містить дуже мало рівнянь або нерівностей, то його можна доповнити тотожністю або виразами, що повторюються.

### 2.2 Методика виконання лабораторної роботи

Задаємо матрицю коефіцієнтів при невідомих **A** та вектор стовпець вільних членів **B** системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 45 & 11 \\ 52 & 34 & 47 \\ 26 & 7 & 65 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 85 \end{pmatrix}$$

## 1. Рішення методом Крамера

$$a1 := \text{augment}(B, A^{(1)}, A^{(2)}) \quad a1 = \begin{pmatrix} 5 & 45 & 11 \\ 11 & 34 & 47 \\ 85 & 7 & 65 \end{pmatrix}$$

$$a2 := \text{augment}(A^{(0)}, B, A^{(2)}) \quad a2 = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 11 \\ 52 & 11 & 47 \\ 26 & 85 & 65 \end{pmatrix}$$

$$a3 := \text{augment}(A^{(0)}, A^{(1)}, B) \quad a3 = \begin{pmatrix} 9 & 45 & 5 \\ 52 & 34 & 11 \\ 26 & 7 & 85 \end{pmatrix}$$

$$x1 := \frac{|a1|}{|A|} \quad x1 = -1.468$$

$$x2 := \frac{|a2|}{|A|} \quad x2 = -0.06$$

$$x3 := \frac{|a3|}{|A|} \quad x3 = 1.901$$

## 2. Рішення методом Гауса

$$\text{ORIGIN} := 1 \\ d := \text{augment}(A, B)$$

$$d = \begin{pmatrix} 9 & 45 & 11 & 5 \\ 52 & 34 & 47 & 11 \\ 26 & 7 & 65 & 85 \end{pmatrix}$$

Отримання розширеної матриці

$$c := \text{rref}(d) \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1.468 \\ 0 & 1 & 0 & -0.06 \\ 0 & 0 & 1 & 1.901 \end{pmatrix}$$

Використання функції rref дозволяє отримати трикутну матрицю

$$x2 := \text{submatrix}(c, 1, 3, 4, 4) \quad x2 = \begin{pmatrix} -1.468 \\ -0.06 \\ 1.901 \end{pmatrix}$$

### 3. Рішення методом ітерацій

ORIGIN := 0

$$e := \begin{pmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 \end{pmatrix}$$

$$dd := A^{-1} - e \quad dd = \begin{pmatrix} -0.023 & 0.032 & -0.021 \\ 0.024 & -4.481 \times 10^{-3} & -2.735 \times 10^{-3} \\ 5.053 \times 10^{-3} & -0.014 & 0.023 \end{pmatrix}$$

$$alfa := e \cdot A \quad alfa = \begin{pmatrix} 0.087 & 0.086 & 0.123 \\ 0.087 & 0.086 & 0.123 \\ 0.087 & 0.086 & 0.123 \end{pmatrix}$$

$$\text{norm1}(alfa) = 0.369$$

$$\text{norm2}(alfa) = 0.3$$

$$beta := dd \cdot B \quad beta = \begin{pmatrix} -1.569 \\ -0.161 \\ 1.8 \end{pmatrix}$$

$$x3^{(0)} := beta$$

$$k := 0..12$$

$$x3^{(k+1)} := beta + alfa \cdot x3^{(k)}$$

|        |   |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|        | 0 | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| $x3 =$ | 0 | -1.569 | -1.497 | -1.476 | -1.47  | -1.468 | -1.468 | -1.468 |
|        | 1 | -0.161 | -0.09  | -0.069 | -0.063 | -0.061 | -0.06  | -0.06  |
|        | 2 | 1.8    | 1.871  | 1.892  | 1.899  | 1.9    | 1.901  | 1.901  |

### 4. Рішення матричним методом

$$x4 := A^{-1} \cdot B$$

$$x4 = \begin{pmatrix} -1.468 \\ -0.06 \\ 1.901 \end{pmatrix}$$

## 5. Рішення за допомогою функції Isolve

$$x5 := \text{Isolve}(A, B)$$

$$x5 = \begin{pmatrix} -1.468 \\ -0.06 \\ 1.901 \end{pmatrix}$$

## 6. Рішення за допомогою блока Given - Find

$$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0 \quad x4 := 0$$

Given

$$9 \cdot x1 + 45 \cdot x2 + 11 \cdot x3 = 5$$

$$52x1 + 34 \cdot x2 + 47 \cdot x3 = 11$$

$$26x1 + 7x2 + 65x3 = 85$$

$$\text{Find}(x1, x2, x3)^T = (-1.468 \quad -0.06 \quad 1.901)$$

### 2.3 Варіанти індивідуальних завдань

2.3.1. Виконати пункт 2.2 у відповідності з такими початковими даними

$$A = \begin{vmatrix} 1-a & 2-a & 3-a & 4-a \\ 5-a & 6-a & 7-a & -8-a \\ 8-a & 7-a & 6-a & -5-a \\ 4-a & -3-a & -2-a & 1-a \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1-a \\ 2-a \\ 3-a \\ 4-a \end{vmatrix}$$

де  $a = 0,05 \cdot K$ ;  $K$  – номер за списком групи.

### 2.4 Зміст звіту про роботу

Звіт оформлюється в зошиті або на аркушах формату А4. Звіт про лабораторну роботу повинен включати наступні пункти:

- найменування роботи;
- хід роботи;
- висновки.

### **Лабораторна робота № 3**

#### **Рішення нелінійних рівнянь. Рішення системи нелінійних рівнянь**

##### *3.1 Короткий опис методів рішення нелінійних алгебраїчних рівнянь та систем нелінійних алгебраїчних рівнянь*

Розв'язати нелінійне рівняння – значить знайти таке значення невідомої  $x = C$ , при якому рівняння перетворюється на тотожність.

Процес розв'язку нелінійного рівняння складається з двох етапів:

- виділення коренів;
- уточнення коренів.

Виділити корені – значить знайти такий інтервал  $[a, b]$ , який містить тільки один корінь. Цей етап виконується графічно або аналітично.

Серед методів уточнення коренів можна виділити наступні:

- метод дотичних;
- метод хорд;
- комбінований метод хорд та дотичних.

##### *3.1.1 Метод дотичних*

Розглянемо нелінійне рівняння виду  $f(x) = 0$ .

Основна розрахункова формула методу має вигляд

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{d}{dx} f(x_n)} \quad n := 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

$n$  – номер наближення.

Розрахунок за формулою (3.1) виконується до тих пір, поки не виконається умова

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

$\varepsilon$  – задана точність рішення.

За початкове наближення вибирається той з кінців інтервалу  $[a, b]$ , в якому знак функції співпадає зі знаком другої похідної.

##### *3.1.2 Метод хорд*

Для нелінійного рівняння  $f(x) = 0$  у якого корінь  $x \in [a, b]$  в методі хорд існує дві розрахункові формули:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n) \cdot (x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \quad \text{при} \quad x_0 = b \quad (3.2)$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n) \cdot (b - x_n)}{f(b) - f(x_n)} \quad \text{при} \quad x_0 = a \quad (3.3)$$

Розрахунок за формулами виконується до тих пір, поки не виконається умова

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

$\varepsilon$  – задана точність рішення.

### 3.2 Методика виконання лабораторної роботи

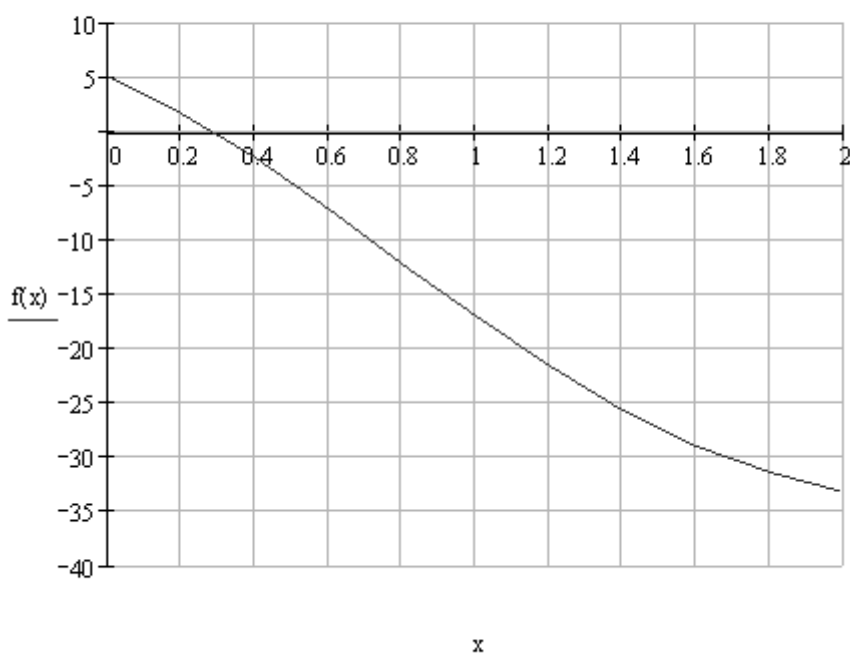
Відповідно до індивідуальних завдань побудувати графік функції  $f(x)$  та знайти відрізок  $[a,b]$  в середині якого знаходиться шуканий корінь рівняння.

$x := 0, 0.2 \dots 2$

$f(x) := 5 \cdot \cos(2 \cdot x) - 15 \cdot x$

#### 1. Метод хорд

| x = | f(x) =    |
|-----|-----------|
| 0   | 5         |
| 0.2 | 1.6053    |
| 0.4 | -2.51647  |
| 0.6 | -7.18821  |
| 0.8 | -12.146   |
| 1   | -17.08073 |
| 1.2 | -21.68697 |
| 1.4 | -25.71111 |
| 1.6 | -28.99147 |
| 1.8 | -31.48379 |
| 2   | -33.26822 |



$a := 0.2$        $b := 0.4$

$$v(x) := \frac{d}{dx} f(x) \quad w(x) := \frac{d}{dx} v(x)$$

$$f(a) \cdot w(a) = -29.57168$$

$$f(b) \cdot w(b) = 35.06478$$

$$x_0 := b$$

$$n := 0..8$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n) \cdot (a - x_n)}{f(a) - f(x_n)}$$

$$x_n =$$

|         |
|---------|
| 0.4     |
| 0.27789 |
| 0.28193 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |

$$f(x_n) =$$

|                            |
|----------------------------|
| -2.51647                   |
| 0.07902                    |
| -2.88682·10 <sup>-3</sup>  |
| 1.04935·10 <sup>-4</sup>   |
| -3.81509·10 <sup>-6</sup>  |
| 1.38703·10 <sup>-7</sup>   |
| -5.04272·10 <sup>-9</sup>  |
| 1.83335·10 <sup>-10</sup>  |
| -6.66489·10 <sup>-12</sup> |

## 2. Метод дотичних

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{v(x_n)}$$

$$x_n =$$

|         |
|---------|
| 0.4     |
| 0.28651 |
| 0.28179 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |

$$f(x_n) =$$

|                            |
|----------------------------|
| -2.51647                   |
| -0.09632                   |
| -1.87313·10 <sup>-4</sup>  |
| -7.16761·10 <sup>-10</sup> |
| 0                          |
| 0                          |
| 0                          |
| 0                          |
| 0                          |
| 0                          |

### 3. Комбінований метод хорд та дотичних

$$n := 1 \dots 4$$

$$x_{2,n} := x_{2,n-2} - \frac{f(x_{2,n-2})}{v(x_{2,n-2})}$$

$$x_{2,n+1} := \frac{x_{2,n-2} \cdot f(x_{2,n-1}) - x_{2,n-1} \cdot f(x_{2,n-2})}{f(x_{2,n-1}) - f(x_{2,n-2})}$$

$$x_{2,n} =$$

|         |
|---------|
| 0.28651 |
| 0.28179 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |

$$x_{2,n+1} =$$

|         |
|---------|
| 0.28199 |
| 0.28179 |
| 0.28178 |
| 0.28178 |

$$f(x_{2,n}) =$$

|                            |
|----------------------------|
| -0.09632                   |
| -1.87313·10 <sup>-4</sup>  |
| -7.16761·10 <sup>-10</sup> |
| 0                          |

$$f(x_{2,n+1}) =$$

|                            |
|----------------------------|
| -4.25098·10 <sup>-3</sup>  |
| -8.3135·10 <sup>-6</sup>   |
| -3.18128·10 <sup>-11</sup> |
| 0                          |

#### 4.3 використанням функції root

$$x := 0.3$$

$$\text{root}(f(x), x) = 0.28178$$

### 5. Рішення системи нелінійних рівнянь з використанням блоку Given - Find

$$x := 1 \quad y := 1$$

Здаються початкові наближення

Given

$$9 \cdot x^3 - 9y^2 + 41 = 0$$

$$5x \cdot y^3 - x \cdot y - 4 = 0$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.08604 \\ 2.13452 \end{pmatrix}$$

### 3.3 Варіанти індивідуальних завдань

3.3.1 Виконати пункти 3.2.1 – 3.2.4 відповідно до початкових даних, взятими з таблиці 1.3 за своїм варіантом.

3.3.2 Виконати пункт 3.2.5 відповідно до початкових даних, взятими з таблиці 3.1 за своїм варіантом.

Таблиця 3.1

Варіанти індивідуальних завдань до виконання пункту 3.2.5

| №  | Система рівнянь і початкове наближення                                                                                  | №  | Система рівнянь і початкове наближення                                                                                 |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | 2                                                                                                                       | 3  | 4                                                                                                                      |
| 1  | $\begin{cases} x = e^x \cos y - 1 \\ y = e^x \sin y + 1 \end{cases} \quad M_0(-0,9; 1,4)$                               | 16 | $\begin{cases} x = -x^2 - y^2 - 0,1 \\ y = -2xy - 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                      |
| 2  | $\begin{cases} x = \frac{(x^2 - y^2)^2}{4} - x^2 y^2 + 0,5 \\ y = xy(x^2 - y^2) + 0,5 \end{cases} \quad M_0(1;1)$       | 17 | $\begin{cases} x = 0,1 - x^2 - y^2 \\ y = -2xy - 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                       |
| 3  | $\begin{cases} x = \frac{x}{x^2 + y^2} + 0,4 \\ y = -\frac{y}{x^2 + y^2} + 1,4 \end{cases} \quad M_0(1;1)$              | 18 | $\begin{cases} x = \frac{x}{x^2 + y^2} - 0,4 \\ y = \frac{1 - y}{x^2 + y^2} + 1 \end{cases} \quad M_0(-1;1)$           |
| 4  | $\begin{cases} x = x^2 + 0,8y^2 + 0,1 \\ y = 2xy + 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                      | 19 | $\begin{cases} x = e^x \cos y - 1 \\ y = e^x \sin y - 1 \end{cases} \quad M_0(-0,9; 1,4)$                              |
| 5  | $\begin{cases} x = x^2 - y^2 + 0,1 \\ x = 2xy + 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                         | 20 | $\begin{cases} x = \frac{(x^2 - y^2)^2}{4} - x^2 y^2 + 0,5 \\ y = xy(x^2 - y^2) - 0,5 \end{cases} \quad M_0(0,5;-0,5)$ |
| 6  | $\begin{cases} x = x^2 - y^2 - 0,1 \\ y = 2xy + 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                         | 21 | $\begin{cases} x = \frac{x}{x^2 + y^2} + 0,4 \\ y = -\frac{y}{x^2 + y^2} - 1,4 \end{cases} \quad M_0(1;-1)$            |
| 7  | $\begin{cases} x = x^2 + y^2 + 0,1 \\ y = 2xy - 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                         | 22 | $\begin{cases} x = x^2 + 0,8y^2 + 0,1 \\ y = 2xy - 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                     |
| 8  | $\begin{cases} x = 1 - e^x \cos y \\ y = e^{-x} \sin y + 1 \end{cases} \quad M_0(0,9; 1,4)$                             | 23 | $\begin{cases} x = x^2 - y^2 + 0,1 \\ x = 2xy - 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                        |
| 9  | $\begin{cases} x = x^2 + y^2 - 0,1 \\ y = 2xy - 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                         | 24 | $\begin{cases} x = x^2 - y^2 - 0,1 \\ x = 2xy - 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                        |
| 10 | $\begin{cases} x = \frac{x}{x^2 + y^2} + 0,4 \\ y = \frac{1 - y}{x^2 + y^2} + 1 \end{cases} \quad M_0(1;1)$             | 25 | $\begin{cases} x = x^2 + y^2 + 0,1 \\ x = 2xy + 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                        |
| 11 | $\begin{cases} x = x^2 y^2 - \frac{(x^2 - y^2)^2}{4} - 0,5 \\ y = xy(y^2 - x^2) + 0,5 \end{cases} \quad M_0(-0,5; 0,5)$ | 26 | $\begin{cases} x = x^2 + y^2 - 0,1 \\ x = 2xy + 0,1 \end{cases} \quad M_0(0;0)$                                        |
| 12 | $\begin{cases} x = \frac{x}{x^2 + y^2} - 0,4 \\ y = 1,4 - \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad M_0(-1; 1)$             | 27 | $\begin{cases} x = \frac{x}{x^2 + y^2} + 0,4 \\ y = -\frac{1 + y}{x^2 + y^2} - 1 \end{cases} \quad M_0(1;-1)$          |

Продовження табл. 3.1

| 1  | 2                                                                                   | 3  | 4                                                                                   |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 13 | $\begin{cases} x = -x^2 - 0,8y^2 - 0,1 \\ y = 0,1 - 2xy \end{cases} \quad M_0(0;0)$ | 28 | $\begin{cases} x = \cos xy \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \quad M_0(1;1)$               |
| 14 | $\begin{cases} x = x^2 - y^2 - 0,1 \\ x = 0,1 - 2xy \end{cases} \quad M_0(0;0)$     | 29 | $\begin{cases} 5,5x^3 - y^2 + 1 = 0 \\ xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases} \quad M_0(1;1)$ |
| 15 | $\begin{cases} x = 0,1 - x^2 + y^2 \\ x = 0,1 - 2xy \end{cases} \quad M_0(0;0)$     | 30 | $\begin{cases} 7,5x^3 - y^2 + 1 = 0 \\ xy^3 - y - 4 = 0 \end{cases} \quad M_0(1;1)$ |

### 3.4 Зміст звіту про роботу

Звіт оформлюється в зошиті або на аркушах формату А4. Звіт про лабораторну роботу повинен містити наступні пункти:

- найменування роботи;
- хід роботи;
- висновки.

#### Лабораторна робота № 4

### Інтерполяція функцій. Лінійна апроксимація і регресійний аналіз

#### 4.1 Загальні відомості про наближення функцій

Апроксимацією (наближенням) функції  $f(x)$  називається знаходження такої функції  $g(x)$  (апроксимуючої функції), яка була б близька заданій. Критерії близькості функцій  $f(x)$  і  $g(x)$  можуть бути різні.

Задача інтерполяції вирішується у тому випадку, коли необхідно знайти значення табличної функції в точках, що не являються вузлами таблиці.

У тому випадку, коли наближення будується на дискретному наборі точок, апроксимацію називають точковою або дискретною.

У тому випадку, коли апроксимація проводиться на безперервній множині точок (відрізку), апроксимація називається безперервною або інтегральною. Прикладом такої апроксимації може служити розкладання функції в ряд Тейлора, тобто заміна деякої функції статечним многочленом.

Більш часто зустрічається вид точкової апроксимації – інтерполяція (у широкому сенсі).

Хай заданий дискретний набір точок, званих вузлами інтерполяції, причому серед цих точок немає співпадаючих, а також значення функції  $y_i$  в цих точках. Потрібно побудувати функцію  $g(x)$ , що проходить через всі задані вузли. Таким чином, критерієм близькості функції є  $g(x_i) = y_i$ .

Як функція  $g(x)$  звичайно вибирається поліном, який називають інтерполяційним поліномом.

У тому випадку, коли поліном єдиний для всієї області інтерполяції, говорять, що інтерполяція глобальна.

У тих випадках, коли між різними вузлами поліноми різні, говорять про шматкову або локальну інтерполяцію.

Знайшовши інтерполяційний поліном, ми можемо обчислити значення функції  $f(x)$  між вузлами (провести інтерполяцію у вузькому сенсі слова), а також визначити значення функції  $f(x)$  навіть за межами заданого інтервалу (провести екстраполяцію).

Існують різноманітні методи, що дозволяють вирішувати задачу інтерполяції, але всі вони є частковим випадком інтерполяційного багаточлена Лагранжа, який має вид:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n \left[ y_i \prod_{j=0, j \neq i}^n \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \right] \quad (4.1)$$

Для спрощення розрахунків у MathCad 12 передбачений ряд вбудованих функцій, що реалізують різноманітні методи інтерполяції та апроксимації.

Лінійна інтерполяція на **Mathcad** здійснюється за допомогою вбудованої функції **linterp(vx, vy, x)**, яка визначає значення в точці  $x$ , розраховане при лінійній інтерполяції даних з точками, координати яких зберігаються в векторах  $vx$  та  $vy$ .

Сплайнова інтерполяція на *Mathcad* здійснюється за допомогою вбудованої функції ***interp(vs, vx, vy, x)***, яка визначає значення сплайна в точці ***x*** по вихідних векторах ***vx*** та ***vy*** та по коефіцієнтах (других похідних) сплайна ***vs***.

Вектор ***vs*** визначає тип граничних умов на кінцях інтервалу і може приймати три значення:

***lspline(vx, vy)*** – вектор коефіцієнтів (других похідних) лінійного сплайна, побудованого по векторах ***vx*** та ***vy***;

***cspline(vx, vy)*** – вектор коефіцієнтів (других похідних) кубічного сплайна, побудованого по векторах ***vx*** та ***vy***;

***pspline(vx, vy)*** – вектор коефіцієнтів (других похідних) параболічного сплайна, побудованого по векторах ***vx*** та ***vy***.

Вбудовані функції ***slope*** і ***intercept*** служать для визначення коефіцієнтів лінійної регресії (апроксимація даних прямою лінією). Функція ***slope*** визначає кутовий коефіцієнт прямої, а функція ***intercept*** точку перетину графіка з вертикальною віссю.

Функція ***regress(Mxy, vz, n)*** є допоміжною, вона готує дані, необхідні для роботи функції ***interp***. Ця функція найкращим чином наближає «хмару» крапок з координатами, що зберігаються в ***Mxy*** і ***vz***.

#### 4.2 Методика виконання лабораторної роботи

***n := 14***

***i := 0..n***

***j := 0..n***

***X<sub>i</sub> :=***

***Y<sub>i</sub> :=***

Початкові дані

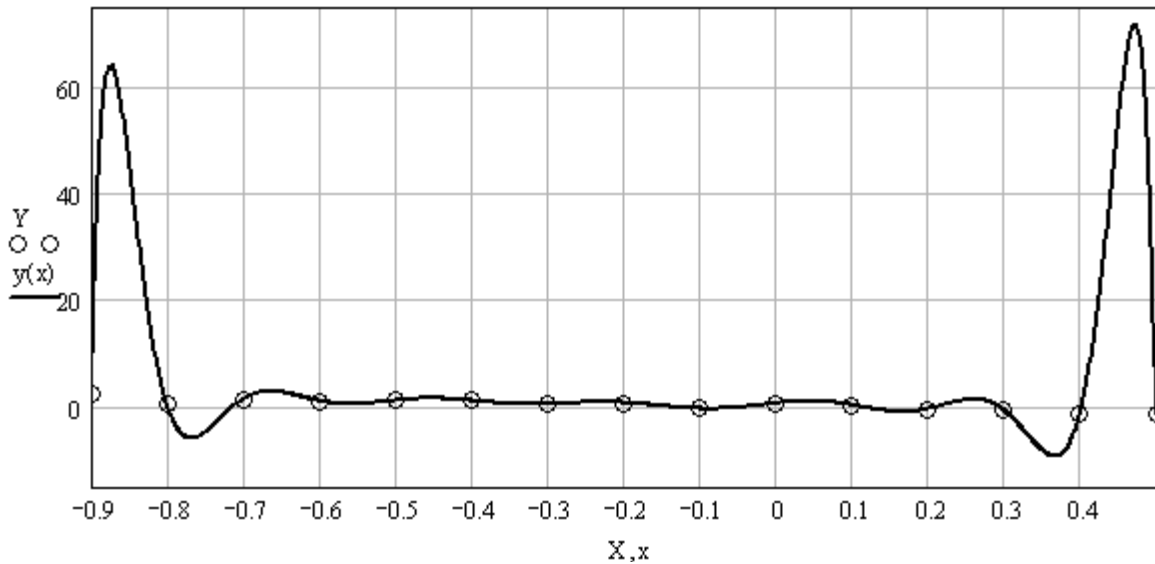
|      |        |
|------|--------|
| -0.9 | 2.258  |
| -0.8 | 0.738  |
| -0.7 | 1.479  |
| -0.6 | 1.094  |
| -0.5 | 1.177  |
| -0.4 | 1.126  |
| -0.3 | 0.523  |
| -0.2 | 0.741  |
| -0.1 | -0.364 |
| 0    | 0.673  |
| 0.1  | 0.3    |
| 0.2  | -0.378 |
| 0.3  | -0.568 |
| 0.4  | -1.266 |
| 0.5  | -1.376 |

## 1. Інтерполяція за методом Лагранжа

$$y(x) := \sum_{i=0}^n \left( Y_i \prod_{j=0}^n \text{if} \left( i \neq j, 1, \frac{x - X_j}{X_i - X_j} \right) \right)$$

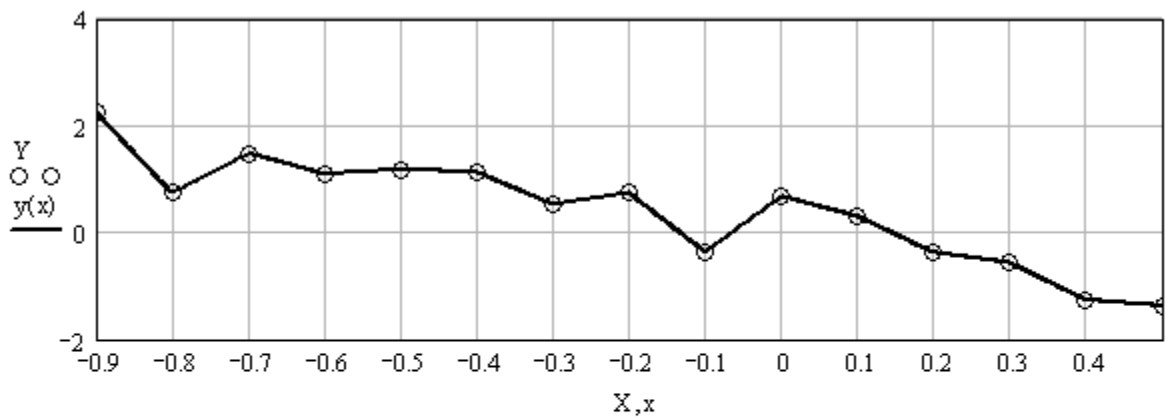
Загальна формула інтерполяції  
методом Лагранжа

$$y(-0.45) = 1.551$$



## 2. Лінійна інтерполяція

$$y(x) := \text{linterp}(X, Y, x)$$

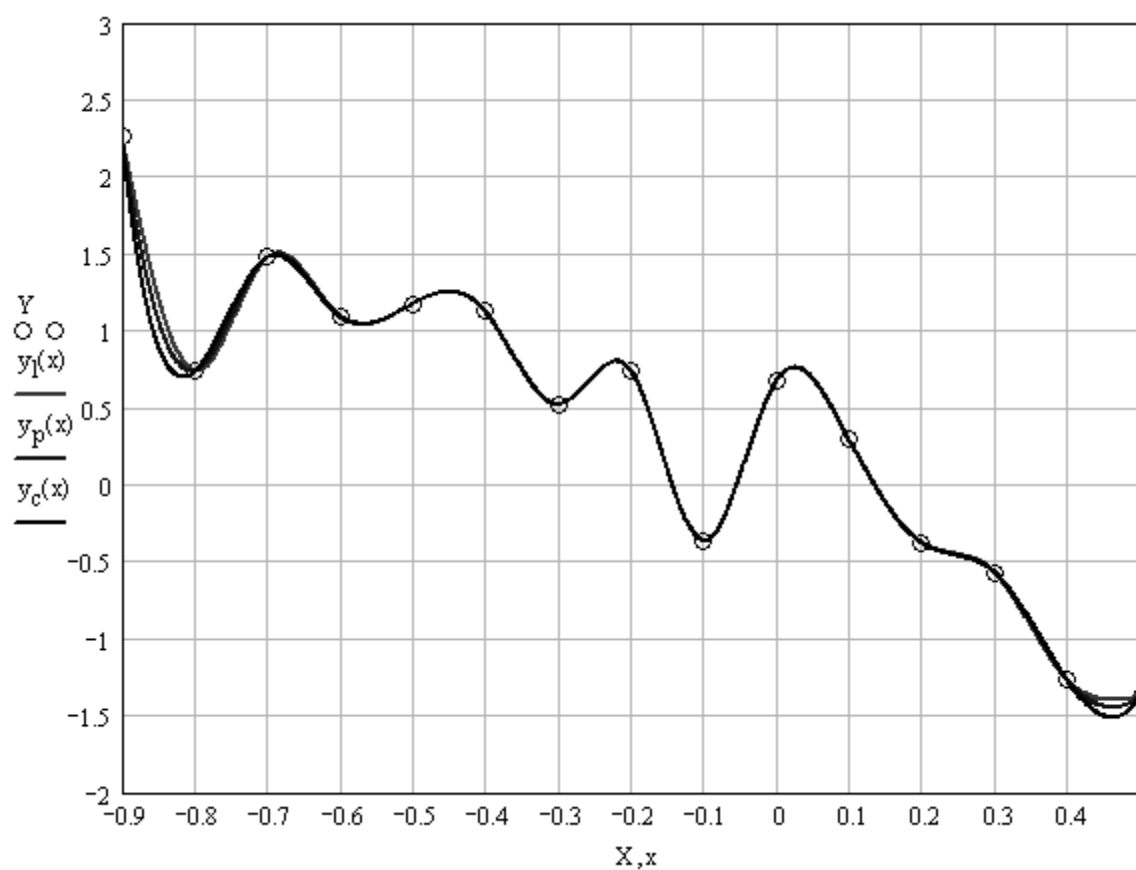


## 3. Інтерполяція сплайнами

$$s := \text{lspline}(X, Y) \quad y_l(x) := \text{interp}(s, X, Y, x)$$

$$s := \text{pspline}(X, Y) \quad y_p(x) := \text{interp}(s, X, Y, x)$$

$$s := \text{cspline}(X, Y) \quad y_c(x) := \text{interp}(s, X, Y, x)$$

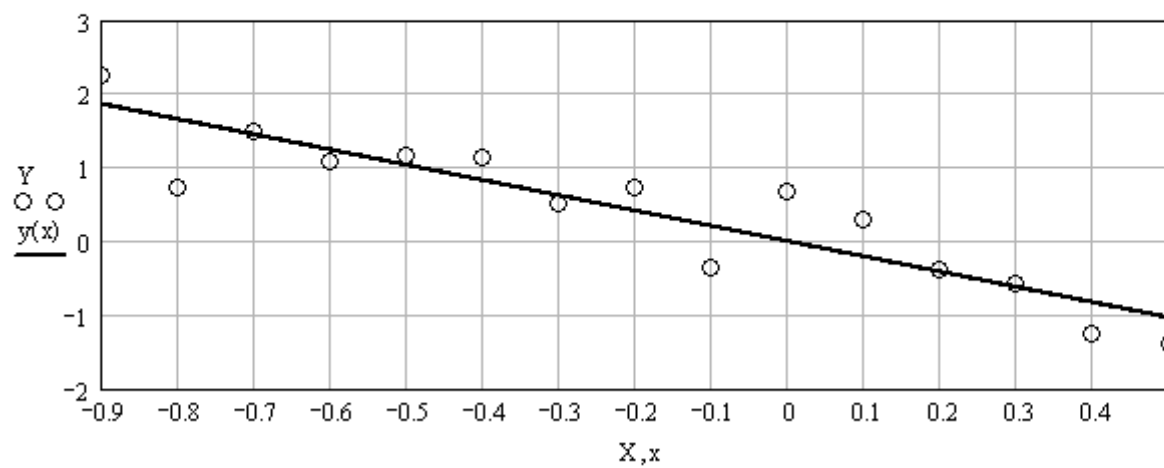


#### 4. Лінійна апроксимація

$$a := \text{slope}(X, Y)$$

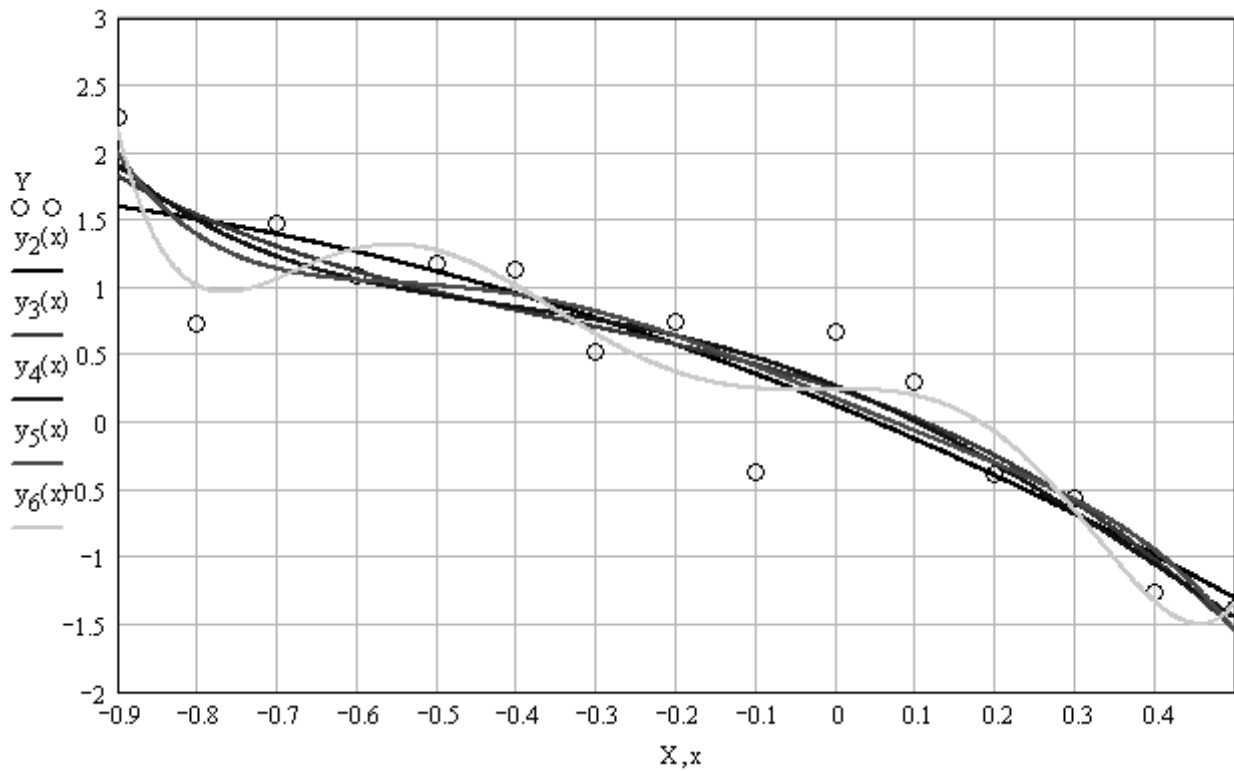
$$b := \text{intercept}(X, Y)$$

$$y_l(x) := a \cdot x + b$$



#### 4. Поліноміальна апроксимація

|          |                                |                                       |
|----------|--------------------------------|---------------------------------------|
| $k := 2$ | $s := \text{regress}(X, Y, k)$ | $y_2(x) := \text{interp}(s, X, Y, x)$ |
| $k := 3$ | $s := \text{regress}(X, Y, k)$ | $y_3(x) := \text{interp}(s, X, Y, x)$ |
| $k := 4$ | $s := \text{regress}(X, Y, k)$ | $y_4(x) := \text{interp}(s, X, Y, x)$ |
| $k := 5$ | $s := \text{regress}(X, Y, k)$ | $y_5(x) := \text{interp}(s, X, Y, x)$ |
| $k := 6$ | $s := \text{regress}(X, Y, k)$ | $y_6(x) := \text{interp}(s, X, Y, x)$ |



#### 4.3 Варіанти індивідуальних завдань

3.3.1 Виконати пункти 4.2.1 – 4.2.5 відповідно до початкових даних, взятими з таблиці 4.1 за своїм варіантом.

Таблиця 4.1

## Варіанти індивідуальних завдань до лабораторної роботи № 4

| Варіант |                | 1              | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| i       | x <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> |
| 1       | 1              | 10,5           | 0,9            | 16,17          | 9,31           | 4,64           | 8,45           | 0,95           | 4,52           | 8,80           | 8,38           |
| 2       | 2              | 9,25           | 3,6            | 15,38          | 8,84           | 5,34           | 9              | 0,83           | 4,00           | 7,33           | 9,03           |
| 3       | 3              | 8,83           | 8,1            | 14,63          | 8,40           | 5,74           | 9,65           | 0,74           | 3,59           | 6,29           | 8,99           |
| 4       | 4              | 8,63           | 14             | 13,92          | 7,98           | 6,03           | 10,4           | 0,67           | 3,25           | 5,50           | 8,74           |
| 5       | 5              | 8,5            | 23             | 13,24          | 7,58           | 6,25           | 11,25          | 0,61           | 2,97           | 4,89           | 8,43           |
| 6       | 6              | 8,42           | 32             | 12,59          | 7,20           | 6,43           | 12,2           | 0,56           | 2,74           | 4,40           | 8,08           |
| 7       | 7              | 8,36           | 44             | 11,98          | 6,84           | 6,59           | 13,25          | 0,51           | 2,54           | 4,00           | 7,73           |
| 8       | 8              | 8,31           | 58             | 11,40          | 6,50           | 6,72           | 14,4           | 0,48           | 2,36           | 3,67           | 7,39           |
| 9       | 9              | 8,28           | 73             | 10,84          | 6,18           | 6,84           | 15,65          | 0,44           | 2,21           | 3,38           | 7,05           |
| 10      | 10             | 8,25           | 90             | 10,31          | 5,87           | 6,94           | 17             | 0,42           | 2,08           | 3,14           | 6,72           |
| 11      | 11             | 8,23           | 109            | 9,81           | 5,57           | 7,04           | 18,45          | 0,39           | 1,96           | 2,93           | 6,40           |
| 12      | 12             | 8,21           | 130            | 9,33           | 5,30           | 7,13           | 20             | 0,37           | 1,86           | 2,75           | 6,09           |
| 13      | 13             | 8,19           | 152            | 8,87           | 5,03           | 7,21           | 21,65          | 0,35           | 1,76           | 2,59           | 5,80           |
| 14      | 14             | 8,18           | 176            | 8,44           | 4,78           | 7,28           | 23,4           | 0,33           | 1,68           | 2,44           | 5,52           |
| 15      | 15             | 8,17           | 203            | 8,03           | 4,54           | 7,35           | 25,25          | 0,32           | 1,60           | 2,32           | 5,25           |
| 16      | 16             | 8,16           | 230            | 7,64           | 4,31           | 7,41           | 27,2           | 0,30           | 1,53           | 2,20           | 4,99           |
| 17      | 17             | 8,15           | 260            | 7,27           | 4,10           | 7,48           | 29,25          | 0,29           | 1,46           | 2,10           | 4,75           |
| 18      | 18             | 8,14           | 292            | 6,91           | 3,89           | 7,53           | 31,4           | 0,28           | 1,41           | 2,00           | 4,52           |
| 19      | 19             | 8,13           | 325            | 6,57           | 3,70           | 7,59           | 33,65          | 0,27           | 1,35           | 1,91           | 4,29           |
| 20      | 20             | 8,13           | 360            | 6,25           | 3,51           | 7,64           | 36             | 0,26           | 1,30           | 1,83           | 4,08           |

| Варіант |                | 11             | 12             | 13             | 14             | 15             | 16             | 17             | 18             | 19             | 20             |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| i       | x <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> |
| 1       | 1              | 20             | 1,8            | 9,51           | 8,55           | 2,79           | 6,45           | 0,91           | 5,65           | 6,00           | 3,50           |
| 2       | 2              | 14             | 7,2            | 9,05           | 8,12           | 3,48           | 7              | 0,80           | 5,00           | 5,00           | 4,74           |
| 3       | 3              | 12             | 16             | 8,61           | 7,72           | 3,89           | 7,65           | 0,71           | 4,48           | 4,29           | 5,25           |
| 4       | 4              | 11             | 29             | 8,19           | 7,33           | 4,17           | 8,4            | 0,65           | 4,06           | 3,75           | 5,44           |
| 5       | 5              | 10,4           | 45             | 7,79           | 6,96           | 4,40           | 9,25           | 0,59           | 3,71           | 3,33           | 5,46           |
| 6       | 6              | 10             | 65             | 7,41           | 6,62           | 4,58           | 10,2           | 0,54           | 3,42           | 3,00           | 5,40           |
| 7       | 7              | 9,71           | 88             | 7,05           | 6,29           | 4,73           | 11,25          | 0,50           | 3,17           | 2,73           | 5,28           |
| 8       | 8              | 9,5            | 115            | 6,70           | 5,97           | 4,87           | 12,4           | 0,47           | 2,95           | 2,50           | 5,13           |
| 9       | 9              | 9,33           | 146            | 6,38           | 5,67           | 4,99           | 13,65          | 0,43           | 2,77           | 2,31           | 4,96           |
| 10      | 10             | 9,2            | 180            | 6,07           | 5,39           | 5,09           | 15             | 0,41           | 2,60           | 2,14           | 4,78           |
| 11      | 11             | 9,09           | 218            | 5,77           | 5,12           | 5,19           | 16,45          | 0,38           | 2,45           | 2,00           | 4,59           |
| 12      | 12             | 9              | 259            | 5,49           | 4,86           | 5,27           | 18             | 0,36           | 2,32           | 1,88           | 4,41           |
| 13      | 13             | 8,92           | 304            | 5,22           | 4,62           | 5,35           | 19,65          | 0,34           | 2,20           | 1,76           | 4,22           |
| 14      | 14             | 8,86           | 353            | 4,97           | 4,39           | 5,43           | 21,4           | 0,33           | 2,10           | 1,67           | 4,04           |
| 15      | 15             | 8,8            | 405            | 4,72           | 4,17           | 5,50           | 23,25          | 0,31           | 2,00           | 1,58           | 3,86           |
| 16      | 16             | 8,75           | 461            | 4,49           | 3,96           | 5,56           | 25,2           | 0,30           | 1,91           | 1,50           | 3,69           |
| 17      | 17             | 8,71           | 520            | 4,27           | 3,76           | 5,62           | 27,25          | 0,29           | 1,83           | 1,43           | 3,52           |
| 18      | 18             | 8,67           | 583            | 4,07           | 3,57           | 5,68           | 29,4           | 0,27           | 1,76           | 1,36           | 3,36           |
| 19      | 19             | 8,63           | 650            | 3,87           | 3,40           | 5,73           | 31,65          | 0,26           | 1,69           | 1,30           | 3,21           |
| 20      | 20             | 8,6            | 720            | 3,68           | 3,23           | 5,78           | 34             | 0,25           | 1,63           | 1,25           | 3,06           |

| Варіант |                | 21             | 22             | 23             | 24             | 25             | 26             | 27             | 28             | 29             | 30             |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| i       | x <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> | y <sub>i</sub> |
| 1       | 1              | 17             | 1,1            | 14,27          | 10,5           | 3,74           | 7,55           | 1,18           | 2,43           | 7,20           | 6,74           |
| 2       | 2              | 12,5           | 4,4            | 13,57          | 9,93           | 4,44           | 8,1            | 1,00           | 2,15           | 6,00           | 8,70           |
| 3       | 3              | 11             | 9,9            | 12,91          | 9,43           | 4,84           | 8,75           | 0,87           | 1,93           | 5,14           | 9,39           |
| 4       | 4              | 10,3           | 18             | 12,28          | 8,96           | 5,13           | 9,5            | 0,77           | 1,75           | 4,50           | 9,57           |
| 5       | 5              | 9,8            | 28             | 11,68          | 8,51           | 5,35           | 10,35          | 0,69           | 1,60           | 4,00           | 9,51           |
| 6       | 6              | 9,5            | 40             | 11,11          | 8,09           | 5,53           | 11,3           | 0,63           | 1,47           | 3,60           | 9,31           |
| 7       | 7              | 9,29           | 54             | 10,57          | 7,68           | 5,69           | 12,35          | 0,57           | 1,37           | 3,27           | 9,05           |
| 8       | 8              | 9,13           | 70             | 10,05          | 7,30           | 5,82           | 13,5           | 0,53           | 1,27           | 3,00           | 8,75           |
| 9       | 9              | 9,00           | 89             | 9,56           | 6,93           | 5,94           | 14,75          | 0,49           | 1,19           | 2,77           | 8,43           |
| 10      | 10             | 8,9            | 110            | 9,10           | 6,59           | 6,04           | 16,1           | 0,45           | 1,12           | 2,57           | 8,09           |
| 11      | 11             | 8,82           | 133            | 8,65           | 6,26           | 6,14           | 17,55          | 0,43           | 1,06           | 2,40           | 7,76           |
| 12      | 12             | 8,75           | 158            | 8,23           | 5,94           | 6,23           | 19,1           | 0,40           | 1,00           | 2,25           | 7,43           |
| 13      | 13             | 8,69           | 186            | 7,83           | 5,65           | 6,31           | 20,75          | 0,38           | 0,95           | 2,12           | 7,11           |
| 14      | 14             | 8,64           | 216            | 7,45           | 5,36           | 6,38           | 22,5           | 0,36           | 0,90           | 2,00           | 6,79           |
| 15      | 15             | 8,6            | 248            | 7,09           | 5,10           | 6,45           | 24,35          | 0,34           | 0,86           | 1,89           | 6,48           |
| 16      | 16             | 8,56           | 282            | 6,74           | 4,84           | 6,51           | 26,3           | 0,32           | 0,82           | 1,80           | 6,18           |
| 17      | 17             | 8,53           | 318            | 6,41           | 4,60           | 6,58           | 28,35          | 0,31           | 0,79           | 1,71           | 5,90           |
| 18      | 18             | 8,5            | 356            | 6,10           | 4,37           | 6,63           | 30,5           | 0,29           | 0,76           | 1,64           | 5,62           |
| 19      | 19             | 8,47           | 397            | 5,80           | 4,15           | 6,69           | 32,75          | 0,28           | 0,73           | 1,57           | 5,36           |
| 20      | 20             | 8,45           | 440            | 5,52           | 3,94           | 6,74           | 35,1           | 0,27           | 0,70           | 1,50           | 5,10           |

#### 4.4 Зміст звіту про роботу

Звіт оформлюється в зошиті або на аркушах формату А4. Звіт про лабораторну роботу повинен містити наступні пункти:

- найменування роботи;
- хід роботи;
- висновки.

## Лабораторна робота № 5

### Рішення звичайних диференціальних рівнянь

#### 5.1 Загальні відомості про рішення звичайних диференціальних рівнянь

Нехай необхідно знайти рішення рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (5.1)$$

з початковою умовою  $y(x_0) = y_0$ . Така задача називається **задачею Коші**.

Розкладемо шукану функцію  $y(x)$  в ряд поблизу точки  $x_0$  і обмежимося першими двома членами розкладання  $y(x) = y(x_0) + y'(x)(x - x_0) + \dots$ .

Врахувавши рівняння (5.1) і позначивши  $x - x_0 = h$ , одержуємо  $y(x) = y(x_0) + f(x_0, y_0)\Delta x$ . Цю формулу можна застосовувати багато разів, знаходячи значення функції у все нових і нових точках.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h. \quad (5.2)$$

Такий метод рішення звичайних диференціальних рівнянь називається **методом Ейлера**. Геометрично метод Ейлера означає, що на кожному кроці ми апроксимуємо рішення (інтегральну криву) відрізком дотичної, проведеної до графіка рішення на початку інтервалу. Точність методу невелика і має порядок  $h$ . Говорять, що метод Ейлера – метод першого порядку, тобто його точність росте лінійно із зменшенням кроку  $h$ .

Існують різні модифікації методу Ейлера, що дозволяють збільшити його точність. Всі вони засновані на тому, що похідну, обчислену на початку інтервалу, замінюють на середнє значення похідної на даному інтервалі. Середнє значення похідної можна одержати (звичайно ж тільки приблизно) різними способами.

Оцінку значення похідної можна поліпшити, збільшуючи число допоміжних кроків. На практиці найбільш поширеним методом рішення звичайних диференціальних рівнянь є **метод Рунге-Кутти** четвертого порядку. Для оцінки значення похідної в цьому методі використовується чотири допоміжні кроки. Формули методу Рунге-Кутти наступні:

$$\begin{aligned} k_1^i &= hf(x_i, y_i); \\ k_2^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^i}{2}\right); \\ k_3^i &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^i}{2}\right); \\ k_4^i &= hf(x_i + h, y_i + k_3^i); \\ \Delta y_i &= \frac{1}{2}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i); \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i. \end{aligned}$$

Перераховані методи можна застосовувати і для вирішення систем диференціальних рівнянь. Оскільки багато диференціальних рівнянь вищих порядків можуть бути зведені заміною змінних до системи диференціальних

рівнянь першого порядку, розглянуті методи можуть бути використані і для вирішення диференціальних рівнянь порядку вище за перше.

Ще один тип завдань, що часто зустрічаються на практиці, краєві завдання. Нехай є диференціальне рівняння другого порядку  $y'' = f(x, y, y')$ . Рішення рівняння потрібно знайти на інтервалі  $[0, 1]$ , причому відомо, що

$y(0) = y_0, y(1) = y_1$ . Зрозуміло, що довільний інтервал  $[a, b]$  заміною  $t = \frac{x-a}{b-a}$  може

бути зведений до одиничного. Для вирішення краєвого завдання звичайно застосовують **метод стрілянини**. Хай  $y'(0) = k$ , де  $k$  – деякий параметр. Для деякого пробного значення  $k$  може бути вирішена задача Коші, наприклад, методом Рунге-Кутти. Одержане рішення залежатиме від значення параметра  $y = y(x; k)$ . Ми хочемо знайти таке значення параметра, щоб виконувалася умова  $y(1; k) = y_1$ . Фактично ми звели початкове завдання до завдання рішення трансцендентного рівняння з таблично заданою функцією. Якщо знайдені такі значення параметра  $k_1$  і  $k_2$ , що  $y(1; k_1) > y_1$  і  $y(1; k_2) < y_1$ , то подальше уточнення значення параметра можна проводити методом ділення відрізка навпіл.

Для рішення диференціальних рівнянь **Mathcad** має ряд вбудованих функцій, зокрема, функцію **rkfixed**, що реалізує метод Рунге-Кутти четвертого порядку з фіксованим кроком.

Функція **rkfixed(y, x1, x2, npoints, D)** повертає матрицю. Перший стовпець цієї матриці містить крапки, в яких одержано рішення, а решта стовпців рішення і його перші  $n-1$  похідні.

Аргументи функції:

$y$  – вектор початкових значень ( $n$  елементів);

$x1$  і  $x2$  – межі інтервалу, на якому шукається рішення диференціального рівняння;

$npoints$  – число крапок усередині інтервалу  $(x1, x2)$ , в яких шукається рішення. Функція **rkfixed** повертає матрицю, що складається з  $1+npoints$  рядків;

$D$  – вектор, що складається з  $n$  елементів, який містить перші похідні шуканої функції.

**Mathcad** має ще дві функції для вирішення задачі Коші. Це функції **rkadapt** і **Bulstoer**. Ці функції мають ті ж самі аргументи і повертають рішення в такій же формі, що і функція **rkfixed**. Перша з цих функцій використовує метод Рунге–Кутти із змінним кроком, що дозволяє підвищити точність обчислень і скоротити їх об'єм, якщо шукане рішення має області, де її значення міняються швидко, і області плавної зміни. Функція **Rkadapt** варіюватиме величину кроку залежно від швидкості зміни рішення.

Функція **Bulstoer** реалізує інший чисельний метод Булірша–Штера. Її слід застосовувати, якщо відомо, що рішення є гладкою функцією.

Для вирішення краєвого завдання є вбудована функція **sbval**, що реалізує метод стрілянини і що дозволяє звести краєве завдання до завдання Коші. Функція **sbval** має наступні параметри:

$v$  – вектор, що містить початкові наближення для бракуючих початкових умов;

$xmin, xmax$  – межі інтервалу, на якому шукається рішення;

$D(x,y)$  – вектор-функція, що містить праві частини системи диференціальних рівнянь першого порядку, еквівалентної початковому рівнянню, розмір вектора  $n$  співпадає із ступенем старшої похідної диференціального рівняння;

$load(xmin,v)$  – вектор-функція, елементи якої відповідають  $n$  значенням функцій на лівій межі інтервалу. Частина цих значень відома, а для частини задані початкові наближення у векторі  $v$ . Їх уточнені значення будуть знайдені в процесі обчислення;

$score(xmax,y)$  – вектор-функція, що має те ж число елементів, що і  $v$ . Кожне значення є різницею між початковими значеннями в кінцевій точці інтервалу і відповідною оцінкою для вирішення. Цей вектор показує, на скільки близько знайдене рішення до істинного.

Mathcad 12 пропонує новий спосіб для вирішення звичайних диференціальних рівнянь, відносно старшої похідної. Для цих цілей служить блок **given** спільно з функцією *odesolve*.

Функція **odesolve** має три аргументи. Перший аргумент – незалежна змінна, другий – межа інтервалу, на якому шукається рішення, останній аргумент – крок, з яким шукається рішення. Останній аргумент може бути опущений.

## 5.2 Методика виконання лабораторної роботи

За даними індивідуальних завдань, пункт 5.3, виконати наступні розрахунки:

5.2.1 Знайти рішення задачі Коші для звичайного диференціального рівняння (ЗДР)  $y' = x + y$ , з початковою умовою  $y(1) = 2$  на відрізку  $[1; 2]$  з кроком  $h$ . Побудувати графіки рішень ЗДР.

5.2.2 Знайти рішення задачі Коші для системи ЗДР:

$$\begin{cases} y_1' = y_1^2 + y_2^2 \\ y_2' = y_1 \cdot y_2 \end{cases}$$

з початковими умовами  $y_1(0) = -1$ ,  $y_2(0) = 1$  на відрізку  $[0; 3]$  з кроком  $h$ . Побудувати графіки рішень системи ЗДР.

Хід роботи наведено нижче.

## Рішення звичайних диференціальних рівнянь

### 1. Рішення методом Рунге-Кутта з постійним кроком

$f(x,y) := x + y$  права частина ЗДР  
 $y_0 := 2$  початкова умова  
 $a := 1$  початок та кінець відрізка  
 $b := 2$  інтегрування  
 $N := 100$  кількість точок рішення

$z := \text{rkfixed}(y, a, b, N, f)$

$$z^T =$$

|   | 0 | 1    | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7    | 8     | 9     |
|---|---|------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|
| 0 | 1 | 1.01 | 1.02  | 1.03  | 1.04  | 1.05  | 1.06  | 1.07 | 1.08  | 1.09  |
| 1 | 2 | 2.03 | 2.061 | 2.092 | 2.123 | 2.155 | 2.187 | 2.22 | 2.253 | 2.287 |

### 2. Рішення методом Рунге-Кутта зі змінним кроком

$\text{eps} := 10^{-6}$  точність рішення  
 $s := 0.01$  мінімальний допустимий шаг рішення

$z1 := \text{rkadapt}(y, a, b, \text{eps}, f, N, s)$

$$z1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1.01 & 1.06 & 1.31 & 1.606 & 1.914 & 2 \\ 2 & 2.03 & 2.187 & 3.144 & 4.727 & 7.061 & 7.873 \end{pmatrix}$$

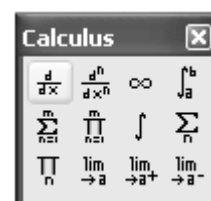
### 3. Рішення з використанням функції `odesolve`

Задано

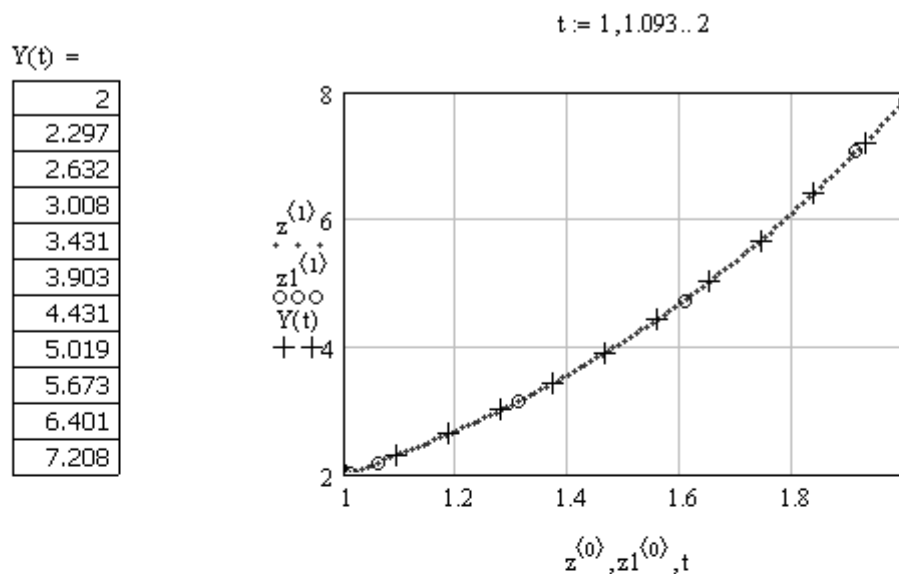
$$\frac{d}{dt} Y(t) = t + Y(t)$$

$$Y(1) = 2$$

$Y := \text{Odesolve}(t, b, 600)$



#### 4. Графіки рішень ЗДР



#### Рішення систем звичайних диференціальних рівнянь

##### 5. Рішення методом Рунге-Кутта з постійним кроком

ORIGIN := 1

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} (y_1)^2 + (y_2)^2 \\ y_1 \cdot y_2 \end{bmatrix} \quad \text{система диференціальних рівнянь}$$

$$\underline{y}_0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{вектор початкових умов}$$

N := 300

z := rkfixed(y, 0, 3, N, D)

|         | 0  | 1     | 2      | 3      | 4      | 5      |
|---------|----|-------|--------|--------|--------|--------|
| $z^T =$ | 0  | 0.01  | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   |
| 1       | -1 | -0.98 | -0.961 | -0.943 | -0.925 | -0.907 |
| 2       | 1  | 0.99  | 0.981  | 0.971  | 0.962  | 0.953  |

## 6. Рішення методом Рунге-Кутта зі змінним кроком

$$\text{eps} := 10^{-6}$$

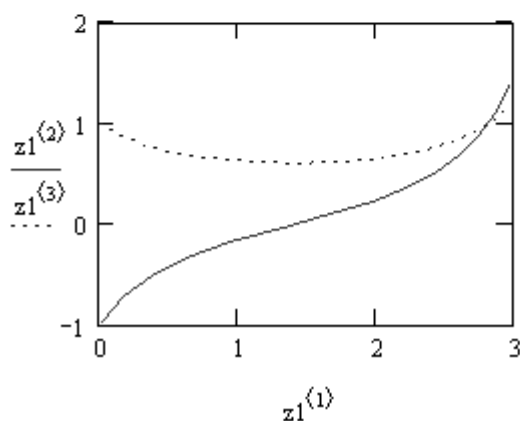
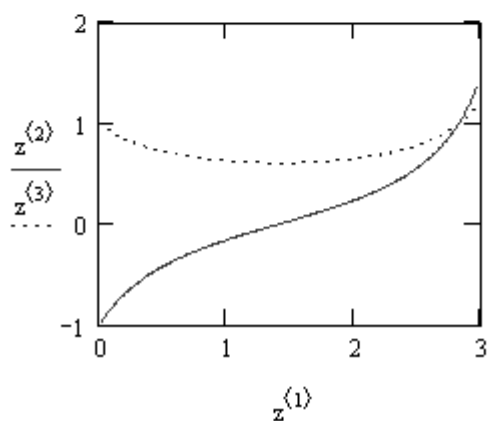
$$s := 0.01$$

$$z1 := \text{rkadapt}(y, 0, 3, \text{eps}, D, N, s)$$

$$z1^T =$$

|   | 0  | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      |
|---|----|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0  | 0.03   | 0.18   | 0.383  | 0.629  | 0.955  |
| 1 | -1 | -0.943 | -0.716 | -0.509 | -0.338 | -0.177 |
| 2 | 1  | 0.971  | 0.859  | 0.759  | 0.685  | 0.631  |

## 7. Графіки рішень системи ЗДР



## 5.3 Варіанти індивідуальних завдань

Таблиця 5.1

Варіанти індивідуальних завдань до виконання пунктів 5.2.1 – 5.2.4

| №<br>варіанта                                 | Рівняння                        | №<br>варіанта | Рівняння                   |
|-----------------------------------------------|---------------------------------|---------------|----------------------------|
| 1                                             | 2                               | 3             | 4                          |
| початкова умова $y(1)=2$ на відріжку $[1; 2]$ |                                 |               |                            |
| 1                                             | $y' = e^x + x + y$              | 16            | $y' = 3x^3 - 3x^2 - 3 + y$ |
| 2                                             | $y' = e^{-x} - \ln x + y$       | 17            | $y' = x^2 - \cos x + y$    |
| 3                                             | $y' = \sin x - \frac{1}{x} + y$ | 18            | $y' = 2x^3 - 3x^2 - 1 + y$ |

Продовження табл. 5.1

| 1  | 2                                 | 3  | 4                                 |
|----|-----------------------------------|----|-----------------------------------|
| 4  | $y' = \cos x - \frac{1}{x+2} + y$ | 19 | $y' = \cos(x-1) - 3x + 2 + y$     |
| 5  | $y' = \cos x + \frac{1}{x+2} + y$ | 20 | $y' = \cos x + \frac{1}{x-2} + y$ |
| 6  | $y' = x^3 + x - 3 + y$            | 21 | $y' = x^3 + 6x^2 + 9x + 1 + y$    |
| 7  | $y' = x^3 + x^2 - 3 + y$          | 22 | $y' = 4x^2 - \cos x - 4 + y$      |
| 8  | $y' = e^x + 2x + y$               | 23 | $y' = 2x^3 + 2x - 1 + y$          |
| 9  | $y' = x^2 + \sin 2x - 2 + y$      | 24 | $y' = x^3 - 3x^2 + 1 + y$         |
| 10 | $y' = \cos x - \frac{1}{x} + y$   | 25 | $y' = \lg x + x + y$              |
| 11 | $y' = x^3 - x^2 + 3 + y$          | 26 | $y' = e^{-x} + 2 \sin x + y$      |
| 12 | $y' = \ln x + x + y$              | 27 | $y' = x - \frac{1}{x^2 + 1} + y$  |
| 13 | $y' = x^3 + x^2 + 3 + y$          | 28 | $y' = x + \frac{1}{x^2 + 1} + y$  |
| 14 | $y' = x^3 + 2x^2 + 3x + y$        | 29 | $y' = x^3 + x^2 + 2 + y$          |
| 15 | $y' = x^2 - \cos x + y$           | 30 | $y' = x^3 - x^2 - 2 + y$          |

Таблиця 5.2

Варіанти індивідуальних завдань до виконання пунктів 5.2.5 – 5.2.7

| №<br>варіанта                                              | Рівняння                                                                               | №<br>варіанта | Рівняння                                                                                   |
|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                                                          | 2                                                                                      | 3             | 4                                                                                          |
| початкові умови $y_1(0)=-1, y_2(0)=1$ на відрізку $[0; 3]$ |                                                                                        |               |                                                                                            |
| 1                                                          | $\begin{cases} y_1' = \sin(y_1) - y_2 \\ y_2' = y_1 \cdot y_2 \end{cases}$             | 16            | $\begin{cases} y_1' = \frac{y_1^2}{y_2} \\ y_2' = y_1^2 + y_2 \end{cases}$                 |
| 2                                                          | $\begin{cases} y_1' = \sin(y_1) - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$                 | 17            | $\begin{cases} y_1' = \frac{y_1^2}{y_2} \\ y_2' = y_1^2 \cdot \sin(y_2) \end{cases}$       |
| 3                                                          | $\begin{cases} y_1' = \sin(y_1) - \cos(y_2) \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$           | 18            | $\begin{cases} y_1' = \frac{\cos(y_1)}{y_2} \\ y_2' = y_1^2 \cdot \sin(y_2) \end{cases}$   |
| 4                                                          | $\begin{cases} y_1' = \sin(y_1) - \cos(y_2) \\ y_2' = \frac{1}{y_1} + y_2 \end{cases}$ | 19            | $\begin{cases} y_1' = \frac{\cos(y_1)}{y_2} \\ y_2' = y_1 \cdot \sin(y_2) \end{cases}$     |
| 5                                                          | $\begin{cases} y_1' = \sin(y_1) \\ y_2' = \frac{1}{y_1} + y_2 \end{cases}$             | 20            | $\begin{cases} y_1' = \frac{\cos(y_1)}{y_2} \\ y_2' = y_1^2 \cdot \sin^2(y_2) \end{cases}$ |

Продовження табл. 5.2

| 1  | 2                                                                                      | 3  | 4                                                                                              |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6  | $\begin{cases} y1' = \frac{\sin(y1)}{y2} \\ y2' = \frac{1}{y1} + y2 \end{cases}$       | 21 | $\begin{cases} y1' = \frac{\cos^2(y1)}{y2} \\ y2' = y1^2 \cdot \sin^2(y2) \end{cases}$         |
| 7  | $\begin{cases} y1' = \frac{\sin(y1)}{y2} + 2y1 \\ y2' = \frac{1}{y1} + y2 \end{cases}$ | 22 | $\begin{cases} y1' = \cos^2(y1) - y2 \\ y2' = y1^2 \cdot \sin^2(y2) \end{cases}$               |
| 8  | $\begin{cases} y1' = \frac{\sin(y1)}{y2} \\ y2' = \frac{y2}{y1} \end{cases}$           | 23 | $\begin{cases} y1' = \cos^2(y1) - y2 \\ y2' = y1 \cdot \sin^2(y2) \end{cases}$                 |
| 9  | $\begin{cases} y1' = \sin(y1) + y2 \\ y2' = y2 \end{cases}$                            | 24 | $\begin{cases} y1' = \cos^2(y1) - y2 \\ y2' = y1 + \sin^2(y2) \end{cases}$                     |
| 10 | $\begin{cases} y1' = 2y1 - 3y2^2 \\ y2' = y1 \cdot y2 \end{cases}$                     | 25 | $\begin{cases} y1' = \cos^2(y1) - y2 \\ y2' = \frac{1}{y1} + \sin^2(y2) \end{cases}$           |
| 11 | $\begin{cases} y1' = y1 \\ y2' = y1 \cdot y2 \end{cases}$                              | 26 | $\begin{cases} y1' = \cos^2(y1) - \frac{1}{y2} \\ y2' = \frac{1}{y1} + \sin^2(y2) \end{cases}$ |
| 12 | $\begin{cases} y1' = y1^2 \\ y2' = y1 \cdot y2 \end{cases}$                            | 27 | $\begin{cases} y1' = \cos(y1) - \frac{1}{y2} \\ y2' = \frac{1}{y1} + \sin^2(y2) \end{cases}$   |
| 13 | $\begin{cases} y1' = y1^2 \\ y2' = y1 \cdot y2^2 \end{cases}$                          | 28 | $\begin{cases} y1' = \cos(y1) - \frac{1}{y2} \\ y2' = \frac{1}{y1} + \sin(y2) \end{cases}$     |
| 14 | $\begin{cases} y1' = y1^2 \\ y2' = y1 + y2 \end{cases}$                                | 29 | $\begin{cases} y1' = \cos(y1) - \frac{1}{y2^2} \\ y2' = \frac{1}{y1} + \sin(y2) \end{cases}$   |
| 15 | $\begin{cases} y1' = \frac{y1^2}{y2} \\ y2' = y1 + y2 \end{cases}$                     | 30 | $\begin{cases} y1' = \cos(y1) - \frac{1}{y2} \\ y2' = \frac{1}{y1^2} + \sin(y2) \end{cases}$   |

#### 5.4 Зміст звіту про роботу

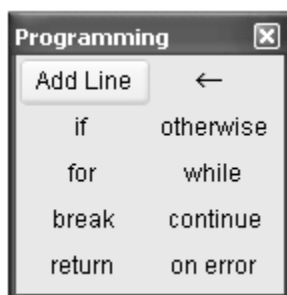
Звіт оформлюється в зошиті або на аркушах формату А4. Звіт про лабораторну роботу повинен містити наступні пункти:

- найменування роботи;
- хід роботи;
- висновки.

## Лабораторна робота № 6

### Програмні модулі в системі Mathcad

#### 6.1 Загальні відомості про програмування у Mathcad



Для створення програми необхідно вказати мишею на кнопку  — «Інструменти програмування» — математичної панелі та натиснути ліву кнопку миші. Після цього з'явиться панель «**Programming**» («Програмування»). За допомогою операторів цієї панелі можна побудувати процедури зі стандартними керованими структурами: цикли із «**for**» і «**while**», розгалуження, рекурсії тощо. Ці програми можуть оперувати з числами, векторами та матрицями.

Для розуміння задачі програмування розглянемо перш за все, як задати власну функцію. Для цього треба задати ім'я функції (воно може бути довільним). Після імені функції ставлять дужки і в них через кому задають змінні, від яких вона залежить. Далі вводять оператор присвоєння ( $:=$ ) і після нього задають вид функції. Тобто, наприклад:

$$f(x, y, z) := \sin\left(x + \frac{y}{z} \cdot 2\right)$$
$$f(1, 2, 3) = 0.723$$

Таким чином, задавши власну функцію, користувач може далі у розрахунках використовувати її ім'я з заданим набором аргументів, значення якої буде автоматично знайдене за виразом який був присвоєний цій функції.

Для створення програмних модулів треба відкрити панель «**Programming**», на якій розташовано вісім операторів програмування. Щоб написати програму, слід створити окремий блок за допомогою оператора «**Add Line**» — 

Цю саму операцію можна зробити за допомогою «гарячої» клавіші «**]**». Оператор  є оператором локального (внутрішнього) присвоєння. Локальний характер присвоєння означає, що змінна має присвоєне значення лише в тілі програми.

Умовний оператор «**if**» надає можливість будувати умовні вирази. Його задають у вигляді <вираз> **if** <умова>. Якщо умова правильна, то виконується інструкція <вираз>. Разом із цим оператором часто використовують оператор «**otherwise**»:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ (-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$f(30) = 1 \qquad f(-4) = -1$$

Цей оператор визначає дію, що має виконуватись, якщо умова оператора «if» виявиться неправильною.

Оператор «**for**» надає можливість організовувати цикли із заданою кількістю повторень. Записується оператор у вигляді « **for Var** є N0 .. N1». Цей запис означає, що вираз, який міститься нижче оператора «**for**», виконуватиметься доти, доки змінна **Var** змінюватиметься від N0 до N1 з кроком 1 (N0 < N1) або з кроком -1 (N0 > N1). На фрагменті показано, як обчислити суму чисел від 1 до 10:

```

sum (h) := | s ← 0
           | for i ∈ 0 .. h
           | s ← s + i
sum (10) = 55

```

Для організації циклів можна використовувати й оператор «**while**». Його записують у вигляді **while** <Умова>. Вираз, який треба обчислити, записують нижче умови. Виконується умова циклу доти, доки виконується деяка умова. Разом із операторами «if», «for» і «while» часто використовують оператор «break», який перериває програму за певної умови і забезпечує її перехід у кінець тіла циклу.

## 6.2 Методика виконання лабораторної роботи

Виконати розрахунки за прикладом наведеним нижче.

### 6.2.1 Реалізація простих програмних модулів

Знайти значення функції:

$$Z = \frac{x \cdot y}{\sin(x^2 + 3x - 2)} \quad , \text{ де } y = a \cdot x^3 + 4, \quad a = 2, \quad x = 3.5$$

#### 1. Модуль для реалізації лінійного процесу

$$\begin{array}{l}
 a := 2 \qquad x := 3.5 \\
 Z := \left| \begin{array}{l} y \leftarrow a \cdot x^3 + 4 \\ Z \leftarrow \frac{x \cdot y}{\sin(x^2 + 3x - 2)} \\ Z \end{array} \right. \qquad Z = 332.001
 \end{array}$$

Знайти значення функції:

$$W = \begin{cases} \sqrt[3]{|t|} & , \text{якщо } t < 0 \\ e^t & , \text{якщо } 0 \leq t \leq 10 \\ \int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du & , \text{в останніх випадках} \end{cases}$$

## 2. Модуль для реалізації розгалуженого процесу

$$t := 11$$

$$\underline{W} := \begin{cases} \sqrt[3]{|t|} & \text{if } t < 0 \\ e^t & \text{if } 0 \leq t \leq 10 \\ \int_0^t \frac{\sin(u)}{u} du & \text{otherwise} \end{cases} \quad W = 1.578$$

Знайти значення функцій:

$$S = \sum_{i=1}^n i^2 \quad \text{та} \quad P = \prod_{i=1}^n \sqrt{i}$$

## 3. Модулі для реалізації циклічного процесу

$$\underline{S(n)} := \begin{cases} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad s \leftarrow s + i^2 \\ s \end{cases}$$

$$n := 10 \quad S(n) = 385$$

$$S(20) = 2.87 \times 10^3$$

$$P(n) := \begin{cases} p \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad p \leftarrow p \cdot \sqrt{i} \\ p \end{cases}$$

$$\underline{n} := 3 \quad P(n) = 2.449$$

$$P(10) = 1.905 \times 10^3$$

### *6.2.2 Програмні модулі складних процедур*

Скласти модуль рішення нелінійного рівняння  $3x^3 - 5.2x^2 - 0.69 = 0$  з використанням вбудованої функції `polyroots`, методом Ньютона та хорд з точністю  $10^{-5}$ .

#### 4. Модулі рішення нелінійного рівняння

##### 4.1 Модуль з використанням вбудованої функції polyroots

$$\begin{aligned} \text{TOL} &:= 10^{-5} && \text{точність рішення} \\ \underline{a} &:= \begin{pmatrix} -0.69 \\ 0 \\ -5.2 \\ 3 \end{pmatrix} && \text{вектор коефіцієнтів при невідомих} \\ \underline{G} &:= \begin{cases} u \leftarrow \text{polyroots}(a) \\ u \end{cases} && G = \begin{pmatrix} -0.035 + 0.355i \\ -0.035 - 0.355i \\ 1.804 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

##### 4.2 Модуль, який реалізує метод Ньютона (дотичних), для пошуку дійсних коренів на відрізку [a;b]

$$f(x) := 3x^3 - 5.2x^2 - 0.69 \quad df(x) := \frac{d}{dx}f(x)$$

$$M\_N(f, df, x_0) := \begin{cases} xx \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)} \\ \text{while } |xx - x_0| > \text{TOL} && x_0 - \text{початкове наближення} \\ \quad \begin{cases} x_0 \leftarrow xx \\ xx \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)} \end{cases} \\ \begin{pmatrix} xx \\ f(xx) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$M\_N(f, df, 1) = \begin{pmatrix} 1.804 \\ 4.885 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

##### 4.2 Модуль, який реалізує метод хорд, для пошуку дійсних коренів на відрізку [a;b]

$$M\_H(f, x_0, c) := \begin{cases} xx \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0) \cdot (x_0 - c)}{f(x_0) - f(c)} \\ \text{while } |xx - x_0| > \text{TOL} && c - \text{одна з границь відрізка [a;b]} \\ \quad \begin{cases} x_0 \leftarrow xx \\ xx \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0) \cdot (x_0 - c)}{f(x_0) - f(c)} \end{cases} \\ \begin{pmatrix} xx \\ f(xx) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$M\_H(f, 1, 2) = \begin{pmatrix} 1.804 \\ -2.013 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

За даними індивідуальних завдань, таблиця 1.3, зробити табуляцію функції в точках:

$$x_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad h = (b - a)/n.$$

#### 5. Табуляція функції $f(x)$ на відрізьку $[a; b]$

```

f(x) := cos(x)
D(a, b, n) :=
  h ← (b - a) / n
  x ← a
  for i ∈ 0..n
    D1,i ← f(x)
    D0,i ← a + h · i
  D

```

n - число відрізків розбиття

$$D(1, 2, 6) = \begin{pmatrix} 1 & 1.167 & 1.333 & 1.5 & 1.667 & 1.833 & 2 \\ 0.54 & 0.54 & 0.54 & 0.54 & 0.54 & 0.54 & 0.54 \end{pmatrix}$$

#### 6.3 Зміст звіту про роботу

Звіт оформляється в зошиті або на аркушах формату А4. Звіт про лабораторну роботу повинен містити наступні пункти:

- найменування роботи;
- хід роботи;
- висновки.

## Список літератури

1. Дьяконов В. MathCad 8.2000: специальный справочник – СПб.: Питер, 2001. – 592 с.
2. Тарасевич Ю. Ю. Численные методы на Mathcad. – Астраханский гос. пед. ун-т: Астрахань, 2000. – 143 с.
3. Новые информационные технологии: Учебное пособие. Часть 3. Основы математики и математическое моделирование / Дьяконов В.П., Абраменкова И.В., Пеньков А.А. Под общ. ред. проф. В.П. Дьяконова. – Смоленск: СГПУ, 2003. – 192 с. с рис.
4. Брановицька С.В., Медведєв Р.Б., Фіалков Ю.Я. Обчислювальна математика та програмування: Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології: Підручник. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», ТОВ «Фірма «Періодика», 2004. – 220 с.: іл.
5. Математичні методи в хімії та хімічній технології: Навч. посібник / Рудавський Ю.К. та ін. За ред. Рудавського Ю.К. – Львів: Світ, 1993. – 208 с.
6. Кирьянов Д. Самоучитель MathCAD 2001. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 544 с.