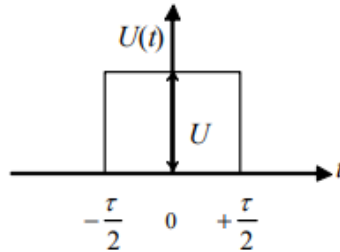


1 СИГНАЛИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Задача 1.4. Розрахувати і побудувати амплітудно-частотну (АЧХ) характеристику імпульсу електричної напруги, зображеного на рис. Амплітуда $U = 7$ В, тривалість $\tau = 2$ мс. Визначити практичну ширину спектру (ПШС) імпульсу.



Розв'язування

Функція, що описує зображений на рис. 1.1, а) сигнал, може бути представлена у вигляді

$$X(t) = \begin{cases} A & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq +\tau/2; \\ 0 & \text{при } t < -\tau/2 \text{ або } t > +\tau/2. \end{cases}$$

Спектральна щільність сигналу:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Можемо обмежити область інтегрування зоною, де $X(t)$ відрізняється від нуля. У цій зоні $X(t) = A$. Тобто,

$$S(j\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = 7 \int_{-0,001}^{0,001} e^{-j\omega t} dt,$$

Маємо табличний інтеграл $\int e^{ax} dx$, , первісна функція для якого $\frac{e^{ax}}{a}$, отже

$$S(j\omega) = 7 \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-0,001}^{0,001} = \frac{7}{-j\omega} (e^{-j0,001\omega} - e^{j0,001\omega}) = \frac{7}{\omega} \frac{(e^{j0,001\omega} - e^{-j0,001\omega})}{j}.$$

Використовуючи формулу Ейлера:

$$\frac{(e^{jx} - e^{-jx})}{2j} = \sin x,$$

отримаємо:

$$S(j\omega) = \frac{7}{\omega} 2 \sin(0,001\omega) = \frac{14 \sin(0,001\omega)}{\omega}.$$

Помножимо і розділимо на 0,001:

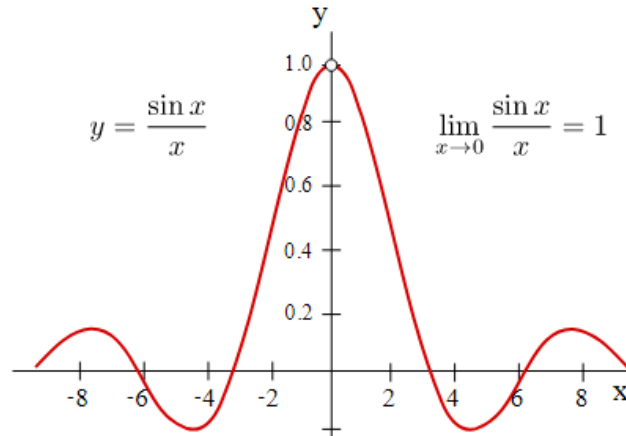
$$S(j\omega) = 0,001 \cdot 14 \frac{\sin(0,001\omega)}{0,001\omega} = 0,014 \frac{\sin(0,001\omega)}{0,001\omega}.$$

Модуль спектральної щільності

$$F(\omega) = |S(j\omega)| = \left| 0,014 \frac{\sin(0,001\omega)}{0,001\omega} \right| = 0,014 \left| \frac{\sin(0,001\omega)}{0,001\omega} \right|.$$

Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Тому при нульовій частоті ($\omega \rightarrow 0$) амплітуда АЧХ є рівною 0,014.

Графік функції $\sin x/x$ є синусоїдою, амплітуда якої зменшується зі зростанням x :



Точки перетину АЧХ з віссю абсцис знайдемо, прирівнявши вираз АЧХ до нуля:

$$0,014 \left| \frac{\sin(0,001\omega)}{0,001\omega} \right| = 0;$$

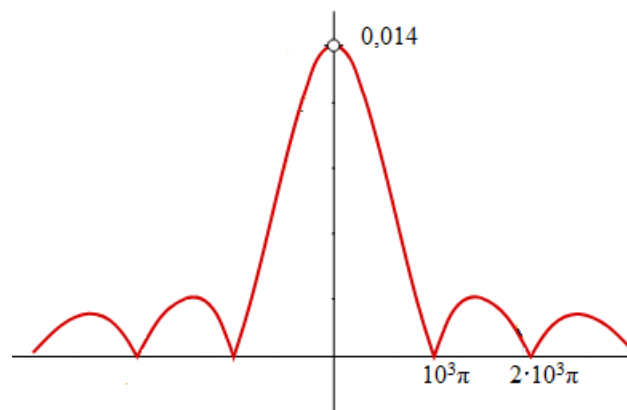
$$\sin(0,001\omega) = 0.$$

Функція синусу приймає нульові значення при наступних значеннях аргументу:

$$0,001\omega = k\pi;$$

$$\omega = k\pi / 0,001 = 1000 k\pi.$$

Оскільки у виразі для АЧХ береться абсолютна величина, усі півхвилі синусоїди є позитивними:



Оскільки 90-відсоткова ПШС імпульсу співпадає з першою «пелюсткою» спектра, приймаємо ПШС рівною $1000\pi = 3140$ рад/с.

Задача 1.4 (MatLab). Побудувати спектр одиничного прямокутного імпульсу з амплітудою $A=4,8$ В і тривалість 2τ , де $\tau=0,5$ мс.

Розв'язування

Побудуємо спектр сигналу за допомогою програмного середовища MatLab.

У командному вікні MatLab задаємо амплітуду $A=4.8$ і тривалість $\tau=0.0005$.

Оскільки комп'ютер не може обробляти аналогові сигнали, то вони представляються у дискретизованому вигляді. Задаємо інтервал дискретизації у 10 разів менший за тривалість імпульсу: $dt = \tau/5$. Створимо вектор з 10000 значень часу $t=0:dt:10000*dt$;

Моделюємо заданий сигнал.

а) створюємо вектор нульових значень сигналу з довжиною, рівною довжині вектора часу:

```
x(1:length(t))=0;
```

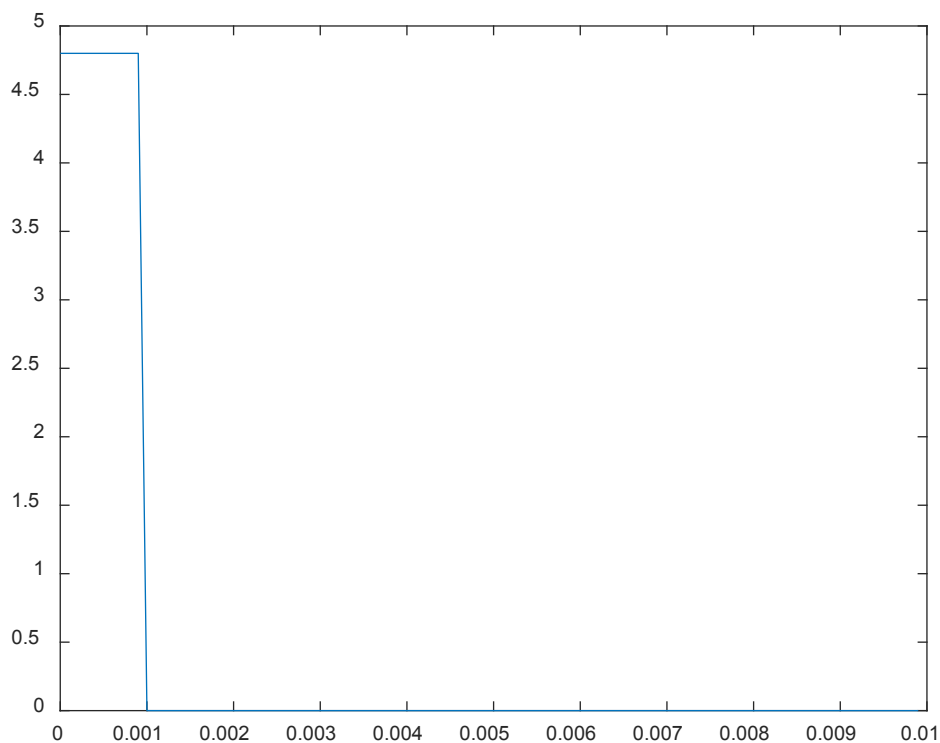
б) протягом часу довжини імпульсу значення сигналу дорівнює амплітуді A :

```
x(1:2*tau/dt)=A;
```

Для контролю побудуємо графік сигналу для перших 100 значень:

```
plot(t(1:100),x(1:100))
```

Упевнились, що амплітуда прямокутного імпульсу є рівною 4.8, а протяжність 1 мс



Застосуємо для цього сигналу дискретне перетворення Фур'є. Це робиться за допомогою функції `fft`:

```
y=fft(x);
```

Комплексний спектр визначається за допомогою функції `fftshift`:

```
Sp=fftshift(y);
```

Модуль комплексного спектра дає амплітудний спектр

```
amp=abs(Sp);
```

а аргумент – спектр фаз:

ph=angle(Sp);

Задаємо ширину смуги частот для побудови спектра

Fs=16000;

Для побудови частотних характеристик задаємо крок дискретизації частоти

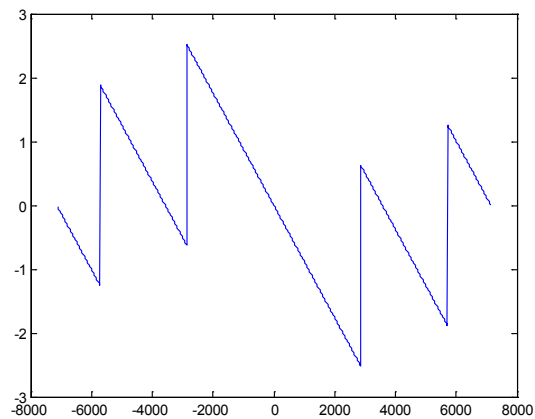
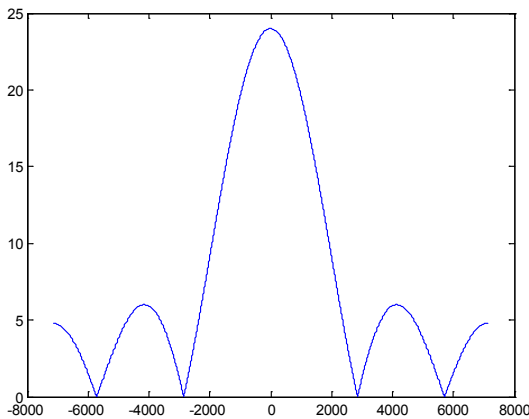
df=Fs/10000;

і отримуємо вектор з 10000 значень частоти:

f=-Fs/2:df:Ff/2;

Будуємо графіки:

plot(f,amp); plot(f,ph)



Задача 1.5. Визначити АЧХ і ФЧХ сигналу, заданого виразом:

$$X(t) = ae^{-bt}, \text{ де } a=10, b=0.1, t \geq 0.$$

Розв'язування

Використавши інтегральне перетворення Фур'є для t що змінюється від 0 до нескінченності, отримаємо

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} ae^{-bt} e^{-j\omega t} dt = a \int_0^{\infty} e^{-(b+j\omega)t} dt = -\frac{a}{b+j\omega} e^{-(b+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{b+j\omega} = \frac{10}{0.1+j\omega}.$$

Таким чином, спектральна функція експоненціального імпульсу є комплексною функцією частоти. АЧХ і ФЧХ сигналу отримаємо як модуль і аргумент цієї функції:

$$F(\omega) = |X(\omega)| = \frac{|10|}{|0.1+j\omega|} = \frac{10}{\sqrt{0.1^2 + \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{0.1}.$$

Побудова графіків

У Microsoft Excel заносимо вихідні дані для графіка:

	A	B	C	D
1	Задача 1.5			
2	a	10 b		0,1

Заповнюємо стовпчик A значеннями частоти у логарифмічному масштабі:

	A	B	C	D
1	Задача 1.5			
2	a	10 b		0,1
3	1			
4	1,7			
5	3			
6	5,6			
7	10			
8	17			
9	30			
10	56			
11	100			

У комірки B3 і C3 заносимо формули для розрахунку $F(\omega)$ і $\varphi(\omega)$, отримані в ході розв'язання задачі:

$=B\$2/КОРЕНЬ(\$D\$2*\$D\$2+A3*A3)$ для $F(\omega)$;

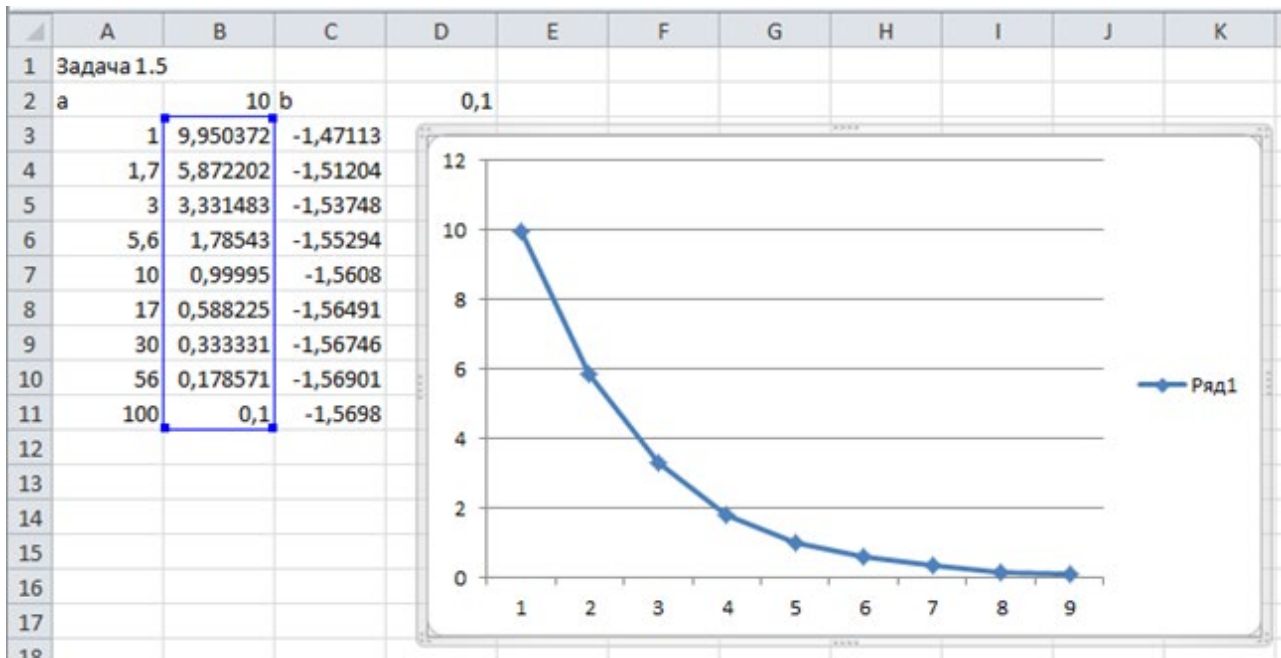
$=-ATAN(A3/\$D\$2)$ для $\varphi(\omega)$.

Розповсюджуємо дані комірок B3 і C3 вниз для усіх частот

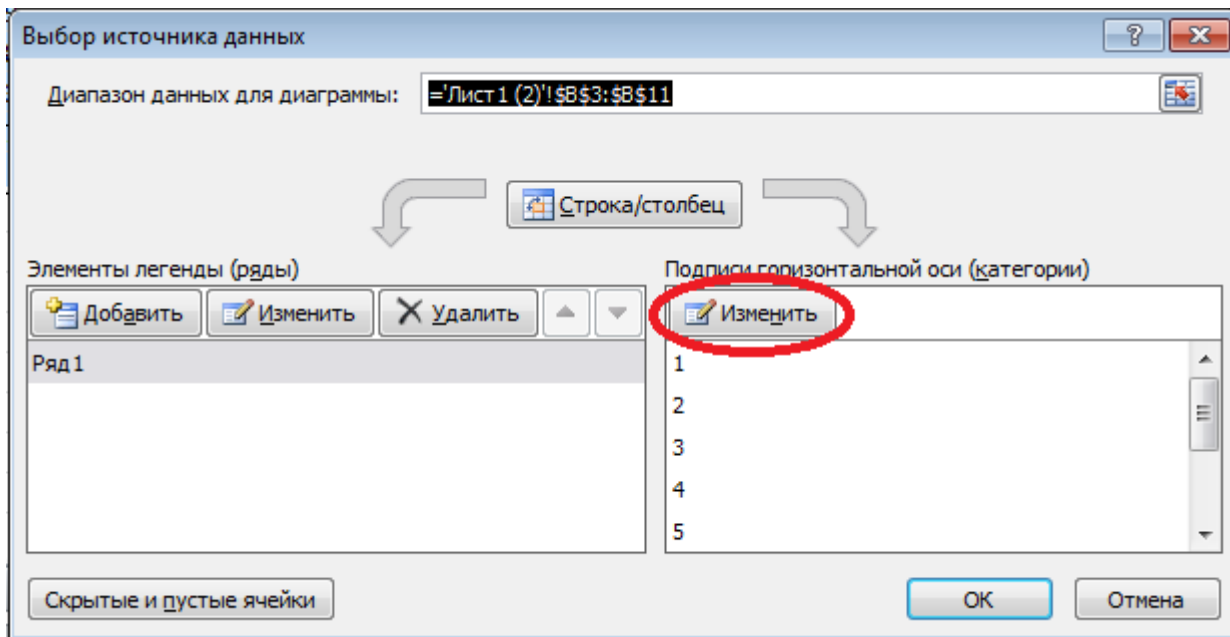
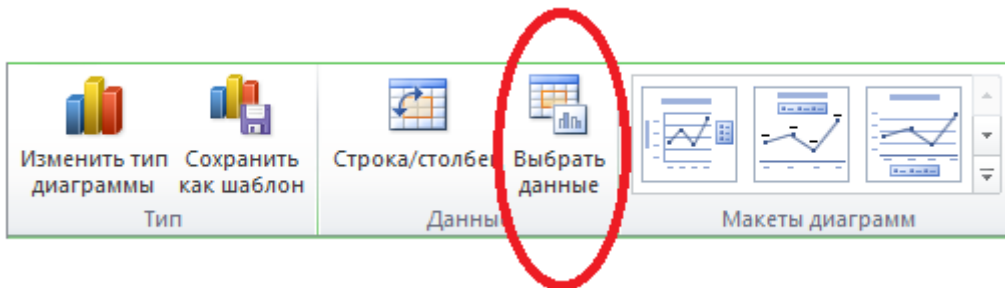
	A	B	C	D
1	Задача 1.5			
2	a	10 b		0,1
3	1	9,950372	-1,47113	
4	1,7	5,872202	-1,51204	
5	3	3,331483	-1,53748	
6	5,6	1,78543	-1,55294	
7	10	0,99995	-1,5608	
8	17	0,588225	-1,56491	
9	30	0,333331	-1,56746	
10	56	0,178571	-1,56901	
11	100	0,1	-1,5698	

Виділяємо діапазон значень $F(\omega)$ від комірки B3 до комірки B11.

Вибираємо опції Вставка-График-График с маркерами. Отримуємо:

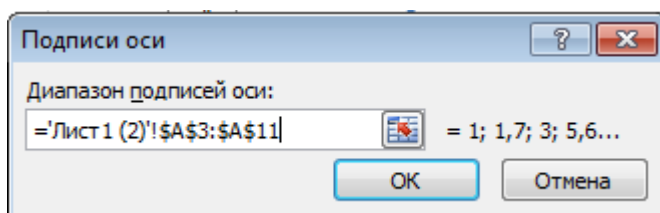


Тиснемо на кнопку «Выбрать данные»:



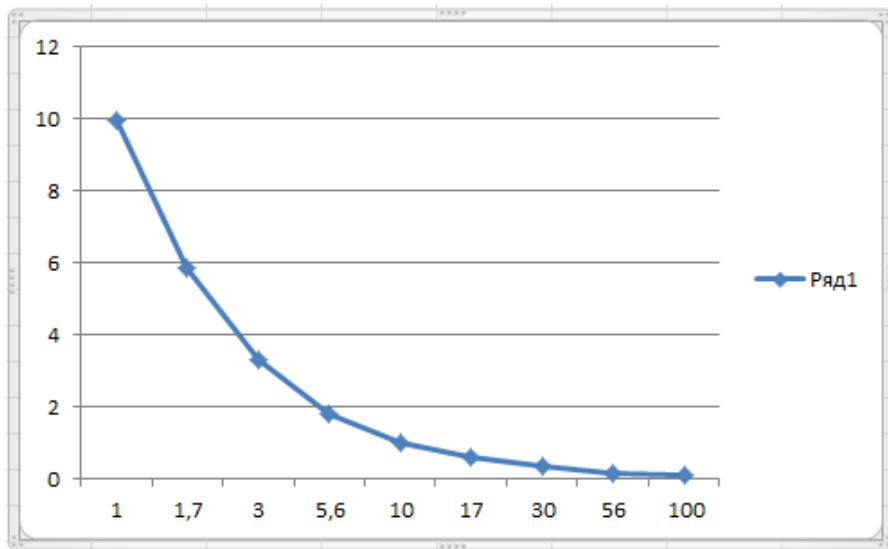
Тиснемо кнопку «Изменить» під написом «Подписи горизонтальной оси»:

У віконечко «Диапазон подписей оси» вносимо частоты, виділивши їх у таблиці від комірки A3 до комірки A11.

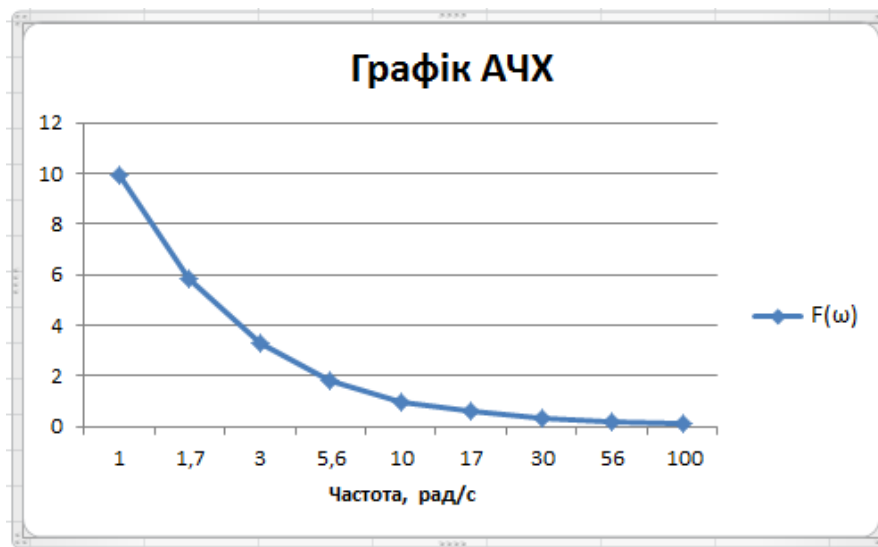


Тиснемо ОК (двічі).

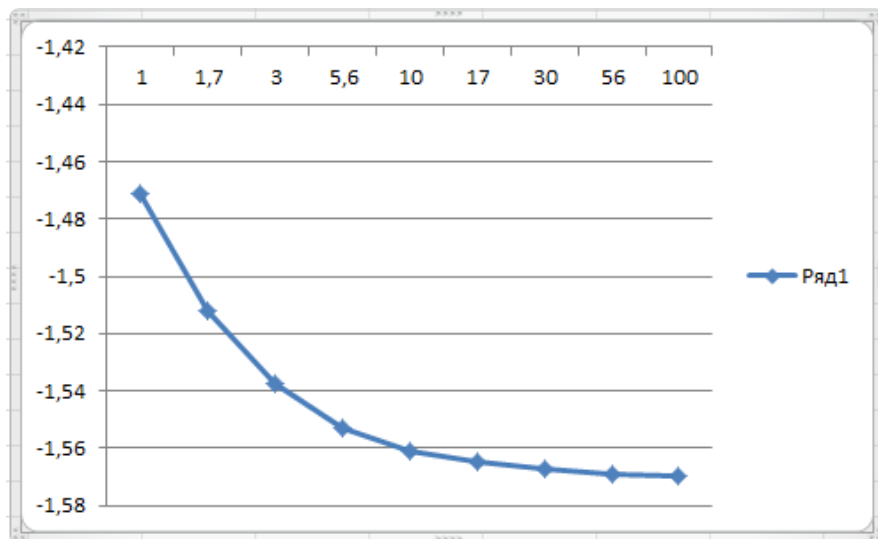
Отримуємо потрібний графік:



Можна його прикрасити заголовками і легендами.



Аналогічно будується графік $\varphi(\omega)$:



Задача 1.6. Визначити АЧХ і ФЧХ сигналу, що описується дельта-функцією наступного вигляду:

$$\delta(t - t_d) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_d; \\ 0 & \text{при } t \neq t_d. \end{cases}$$

Час дії імпульсу t_d взяти рівним номеру варіанту 25.

Розв'язування

Використаємо інтегральне перетворення Фур'є до сигналу $X(t) = \delta(t - t_d)$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_d) e^{j\omega t} dt .$$

Отриманий вираз будемо розглядати як інтеграл від добутку функції $e^{j\omega t}$ та дельта функції. Враховуючи стробуючу дію дельта-функції, можна сказати, цей інтеграл дорівнює значенню функції $e^{j\omega t}$ в момент дії дельта-імпульсу, тобто при $t = t_d$. Таким чином, $S(j\omega) = e^{j\omega t_d}$. Маємо показову форму представлення числа $z = re^{j\varphi}$. АЧХ сигналу це модуль спектральної щільності $r=1$, а ФЧХ — це її аргумент $\varphi = \omega t_d = 25\omega$.

Графіки функцій будуюмо у Microsoft Excel аналогічно задачі 1.5. У комірку B2 заносимо номер варіанту. У комірки B3 і C3 вводимо формули для розрахунку $F(\omega)$ і $\varphi(\omega)$, отримані в ході розв'язання задачі:

=1 для $F(\omega)$;

=B\$2*A3 для $\varphi(\omega)$.

Розповсюджуємо дані комірок B3 і C3 вниз для усіх частот.

	A	B	C
1	Задача 1.6		
2	Варіант	25	
3	1	1	=B\$2*A3
4	1,7	1	42,5
5	3	1	75
6	5,6	1	140
7	10	1	250
8	17	1	425
9	30	1	750
10	56	1	1400
11	100	1	2500

Графіки будуюмо, використовуючи меню «Вставка-График-График с маркерами».

