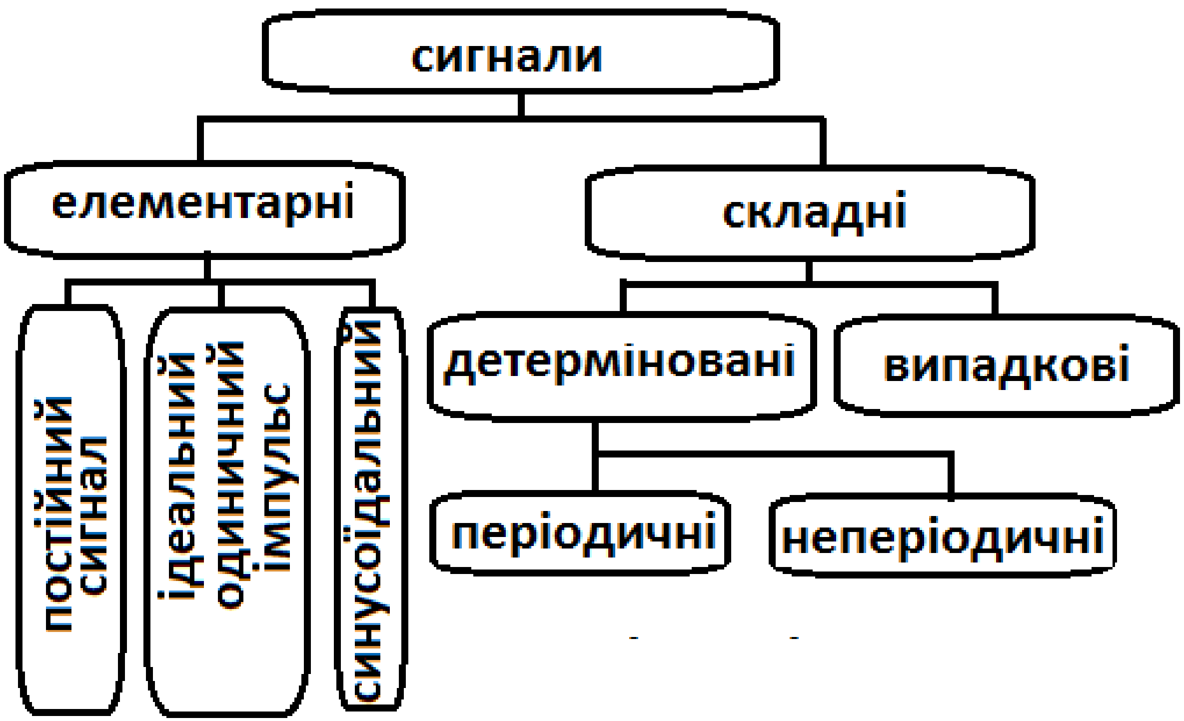
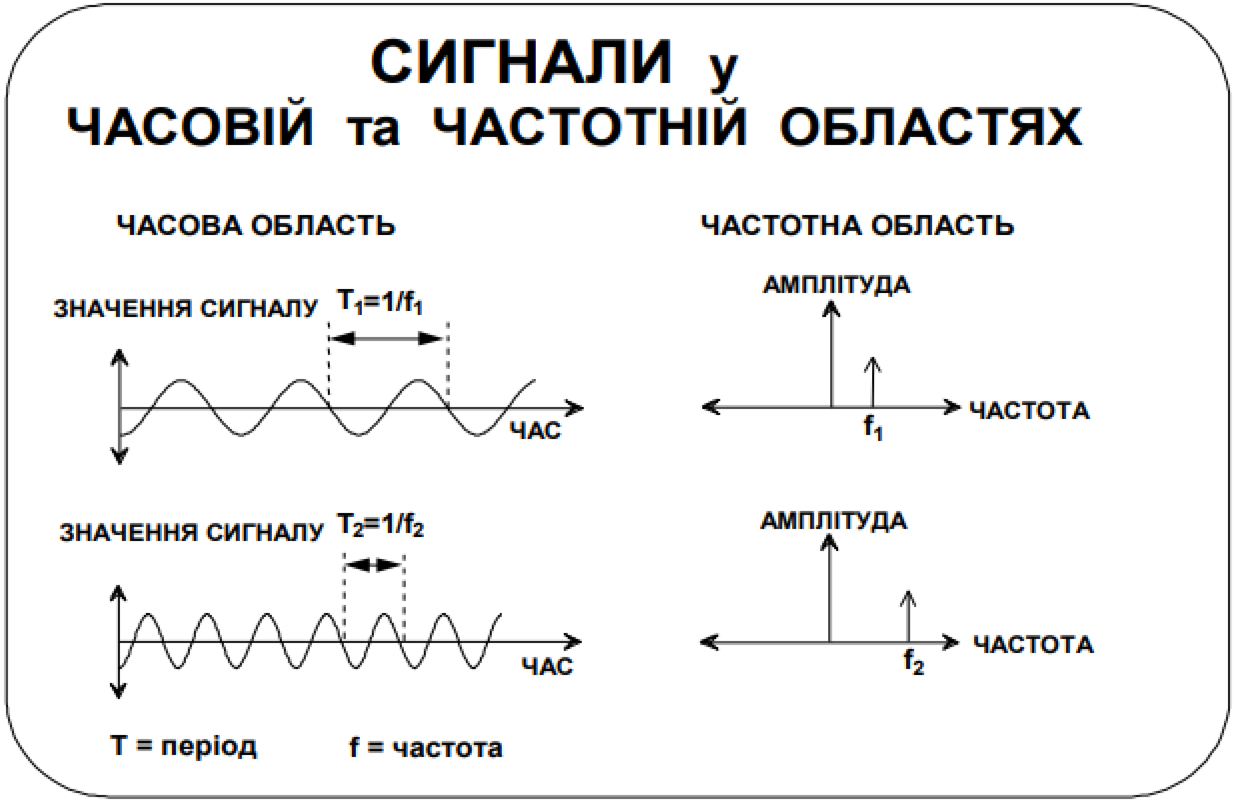
Сигнали

Сигнал - це матеріальний носій інформації



Сигнали представляють у часовій або частотній області



Графічне представлення у частотній області називають *спектром*

Елементарні сигнали

1. Постійний сигнал, незмінний у часі:

x=const.

Постійний сигнал має тільки один параметр – його значення x.

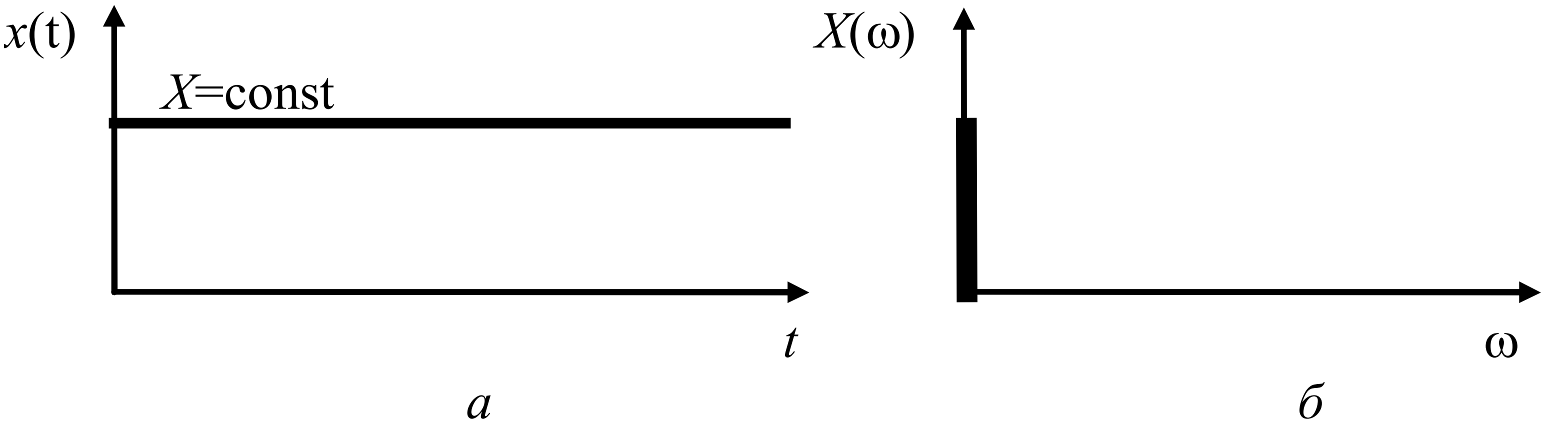


Рис. 1.1 – Характеристики постійного сигналу: а — часова; б — частотна

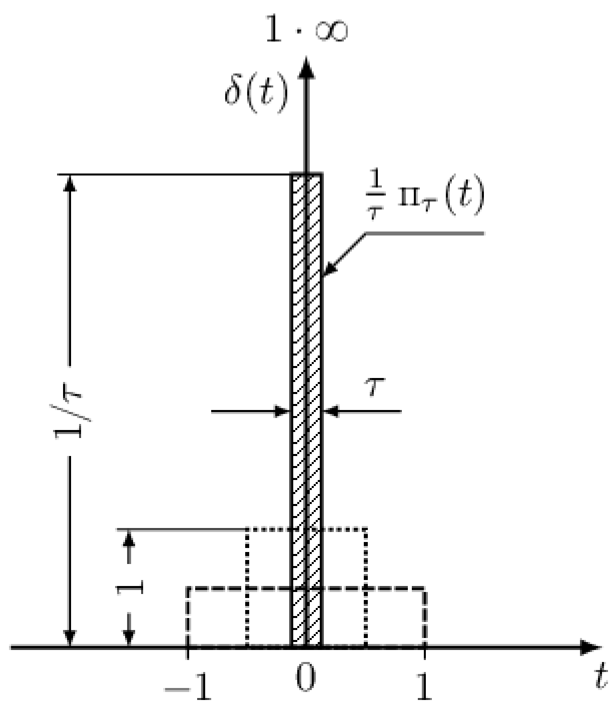
2. Ідеальний одиничний імпульс

Математично описується дельта-функцією:

$$\delta(t - t_д) = \begin{cases} 0 \text{ коли } t \neq t_д \\ \infty \text{ коли } t = t_д \end{cases}$$

де $t_д$ — момент дії імпульсу, що є єдиним його параметром.

Якщо протяжність імпульсу, що має площу, рівну одиниці, зменшувати до нескінченно малої величини, то амплітуда імпульсу буде прагнути до нескінченності.



Інтеграл від добутку будь-якого сигналу x(t) та дельта-функції дорівнює значенню цього сигналу в момент дії імпульсу $t=t_д$:

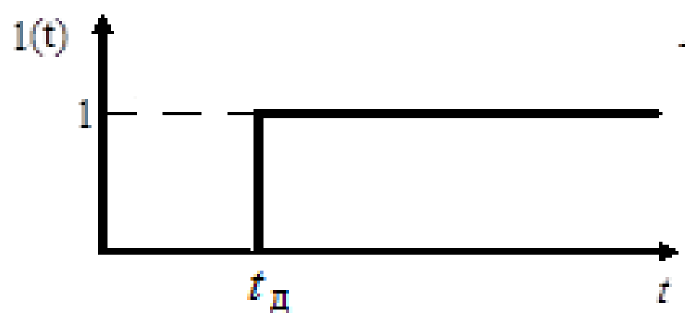
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\delta(t - t_д)dt = x(t)\Big|_{t=t_д} = x(t_д).$$

Тобто дельта-функція має стробуючу дію, бо вибирає з неперервного сигналу його миттєве значення в момент $t_д$.

Інтеграл від дельта-функції являє собою одиничну функцію

$$1(t - t_д) = \begin{cases} 0 \text{ коли } & t < t_д; \\ 1 \text{ коли } & t \geq t_д. \end{cases}$$

Відповідно похідна одиничної функції є дельта-функцією.



У часовій області Ідеальний одиничний імпульс зобразити неможливо. Для побудови спектрів знайдемо спектральну щільність такого імпульсу:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_д) e^{j\omega t} dt$$

Враховуючи стробуючу дію дельта-функції, цей інтеграл дорівнює значенню функції $e^{j\omega t}$ в момент дії дельта-імпульсу:

$$S(j\omega) = e^{j\omega t_д}.$$

Згідно показникової форми представлення комплексних чисел

$$\boldsymbol{z = |z| \cdot e^{j\varphi}}$$

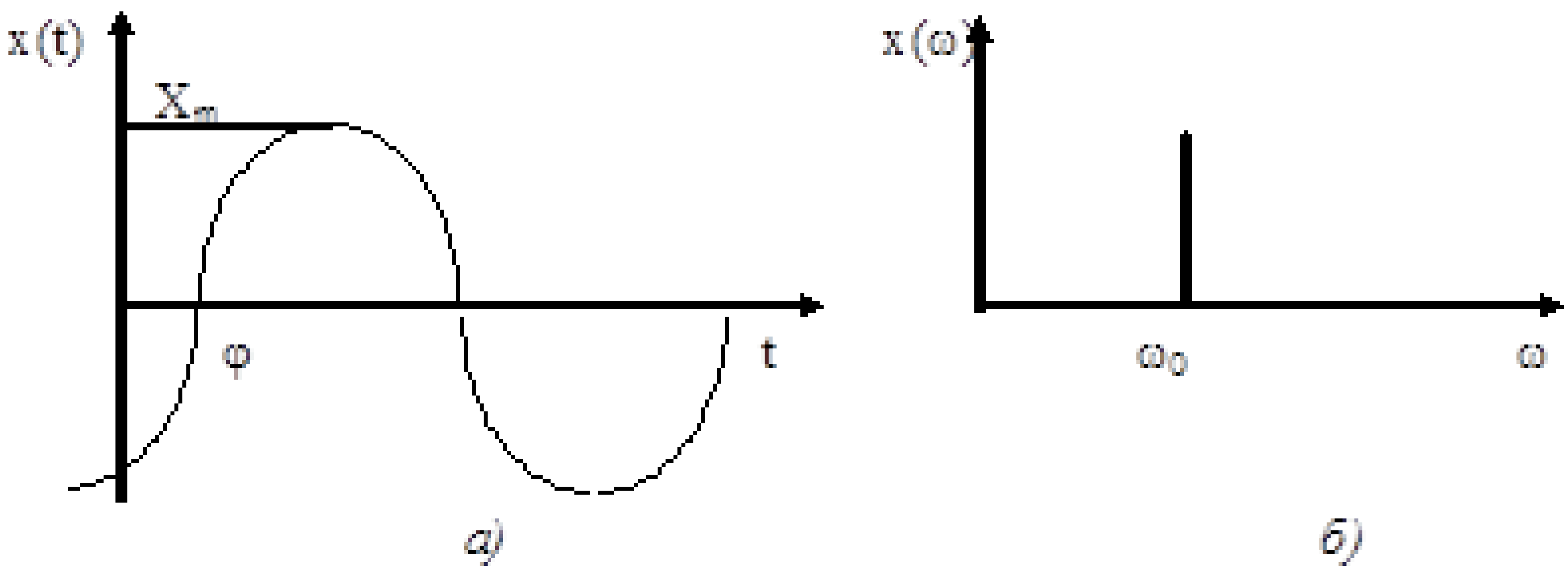
модуль спектральної щільності $|z| = 1$, а аргумент $\varphi = \omega t_д$.

Таким чином, сигнал, що описується дельта-функцією, має рівномірний нескінчений амплітудний спектр і фазовий спектр, що лінійно зростає зі збільшенням частоти.

3. Синусоїдальний сигнал

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

В□н визначається трьома параметрами: амплітудою X_m , частотою ω (або періодом $T=2\pi/\omega$) та початковою фазою φ.



Характеристики синусоїдального сигналу: а — часова; б — частотна

Складні квазідетерміновані сигнали

Періодичні сигнали повторюють свої значення через інтервал часу T:

$$x(t) = x(t \pm kT)$$

Вони можуть бути представлені рядом Фур'є, який має кілька форм.

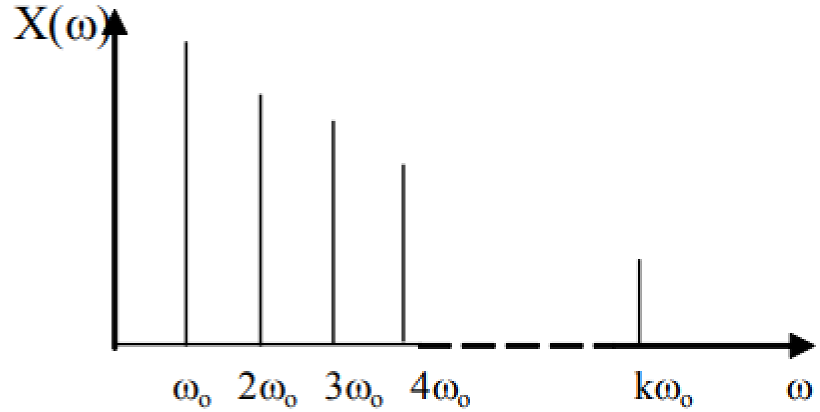
Тригонометрична: $f(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau),$

де $\tau = 2\pi t/T$ – відносний час.

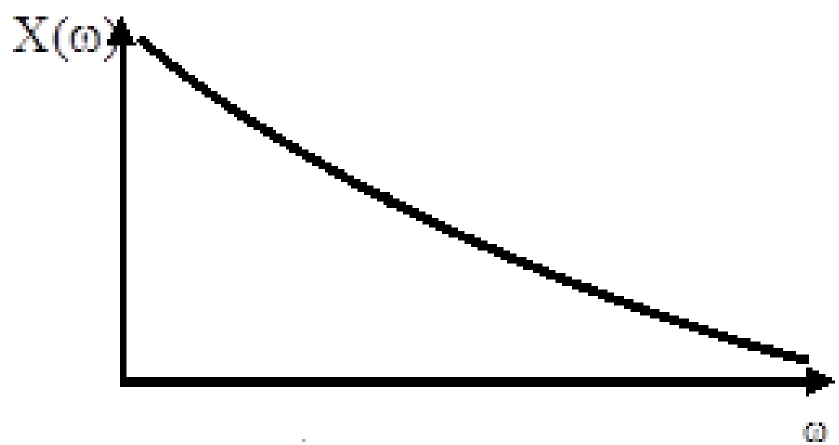
Косінусна: $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k),$ де $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Показова: $x(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k e^{jk\omega_0 t}$, де $\dot{a}_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$.

Спектр періодичного сигналу є лінійчастим:



Неперіодичний сигнал розглядають, як періодичний, у якого період T → ∞. Тоді $\omega_0 \rightarrow 0$, лінії спектру зливаються в єдину фігуру:



Ряд Фур’є перетворюється в інтеграл:

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega\tau}\, d\omega,$$

де $S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau$ – спектральна щільність сигналу, яка містить інформацію і про амплітуди і про фази гармонік сигналів.

Модуль $S(j\omega)$ являє собою амплітудно-частотну характеристику сигналу:

$$F(\omega) = |S(j\omega)|,$$

а аргумент – фазочастотну:

$$\Phi(\omega) = \arg[S(j\omega)].$$

Випадкові Сигнали

Випадковим називають сигнал, який в ході його аналізу може приймати той або інший вигляд, при чому невідомо, який саме.

Але з тією або іншою вірогідністю можна прогнозувати, яке значення може прийняти випадковий сигнал, якщо відомі його ймовірнісні характеристики. Повний опис випадкового сигналу дає закон розподілу ймовірностей його значень. Проте вважається, що в багатьох випадках такі сигнали можна характеризувати трьома параметрами:

а) математичне очікування або момент першого порядку

$$m_X = M_1[X] = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(X) dX$$

де *f(X)* – густина ймовірності випадкової величини *X*;

б) дисперсія або момент другого порядку

$$D_X = M_2[X] = M_1[(X - m_X)^2]$$

в) кореляційна функція, що визначається для двох перерізів випадкового процесу t_1 та $t_2=t_1+\tau$

$$K_X(t_1, t_2) = M_1[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))]$$

Конкретний вигляд, який приймає сигнал під час його дослідження, називається реалізацією випадкового сигналу, а його математичний опис – вибірковою функцією. В результаті ряду випробувань отримують сімейство реалізацій сигналу. Таке сімейство реалізацій прийнято називати ансамблем реалізацій. Задаємо момент часу t_1, однаковий для усіх реалізацій ансамблю, сукупність значень вибіркових функцій у цей момент являє собою статистичну вибірку, яку називають перерізом випадкового процесу

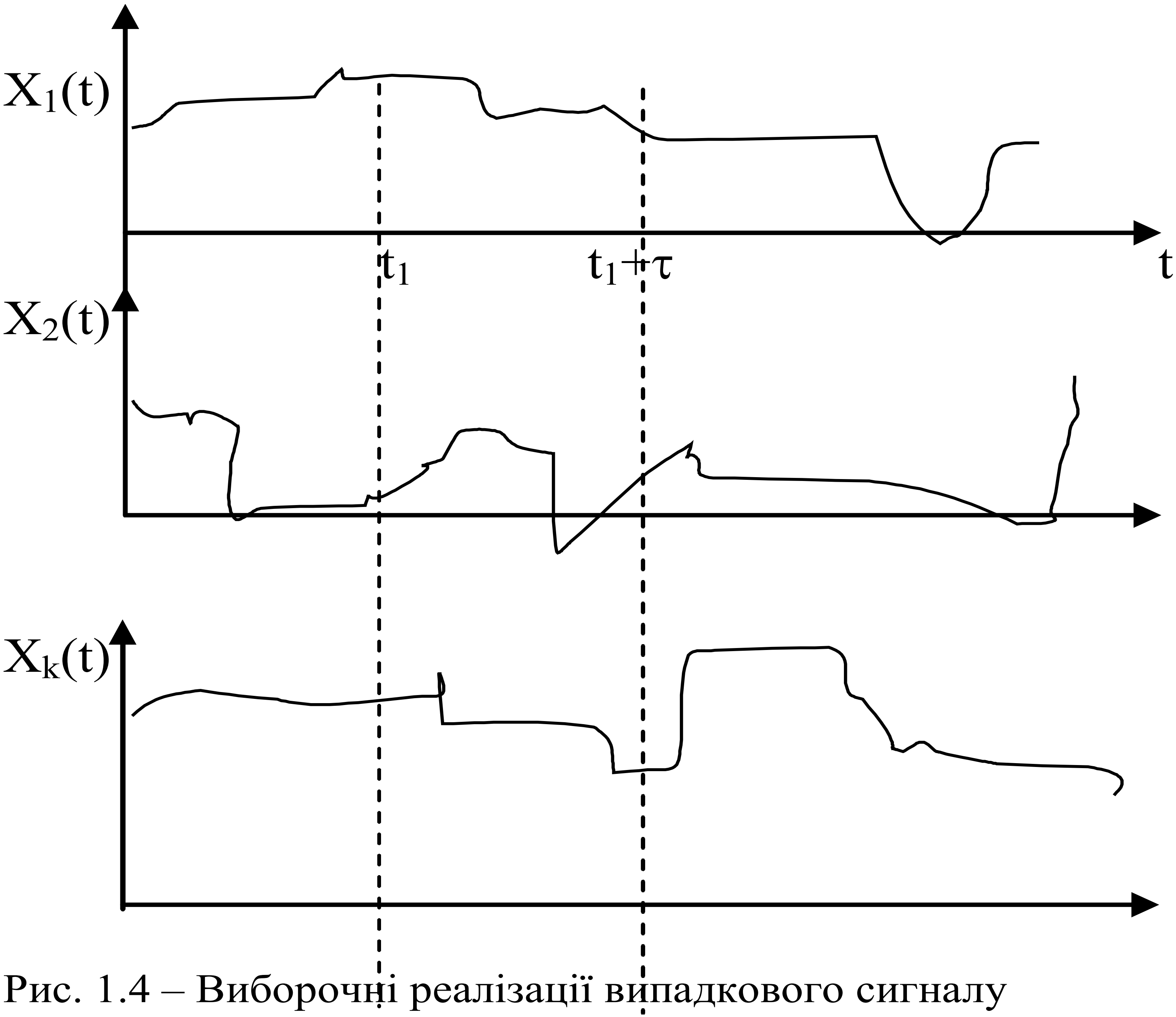


Рис. 1.4 – Виборочні реалізації випадкового сигналу