

Теорія передачі інформації

Узагальнені характеристики сигналів:

- часова — час передачі сигналу T_c ;
- частотна — ширина його частотного спектру F_c ;
- енергетична — динамічний діапазон, який визначається як логарифм відношення середньої потужності сигналу P_c до середньої потужності завади (шуму) P_ξ :

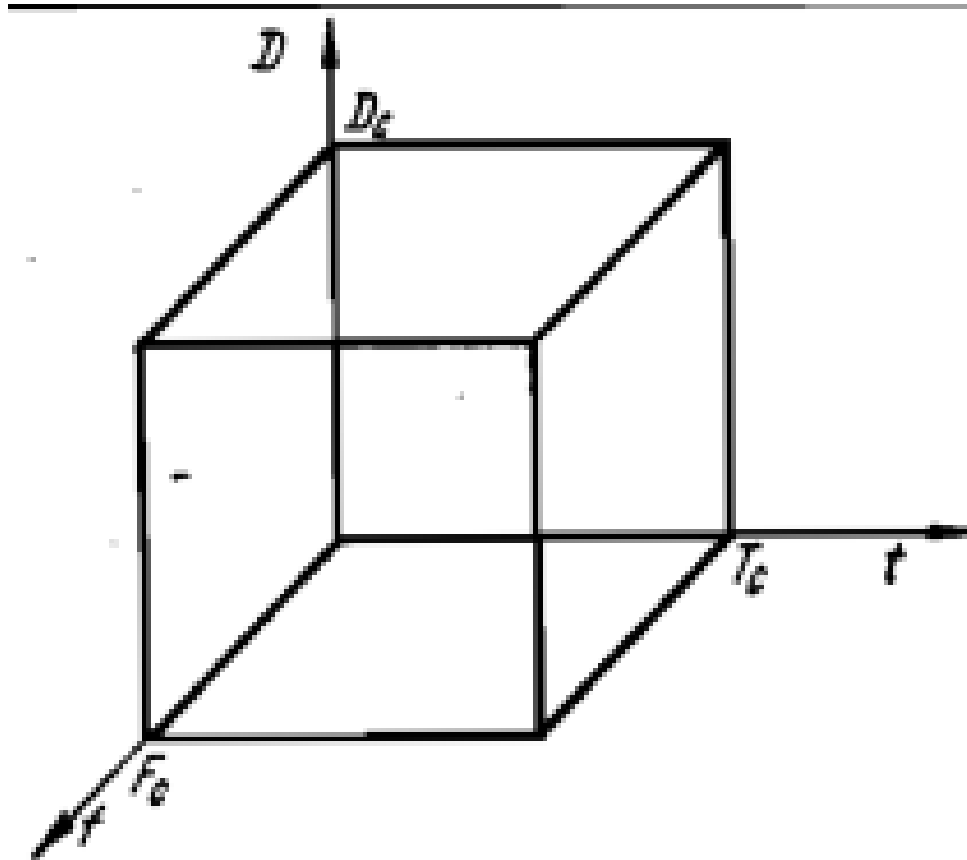
$$D = \log_2 P_c / P_\xi$$

Добуток

$$V_c = T_c F_c D_c$$

прийнято називати об'ємом сигналу.

У геометричному представленні об'єм сигналу має вигляд паралелепіпеда з ребрами T_c , F_c і D_c .



Узагальнені характеристики каналів зв'язку:

- часова — час використання каналу T_k ;
- частотна — ширина смуги частот пропускання F_k ;
- енергетична — динамічним діапазоном каналу D_k .

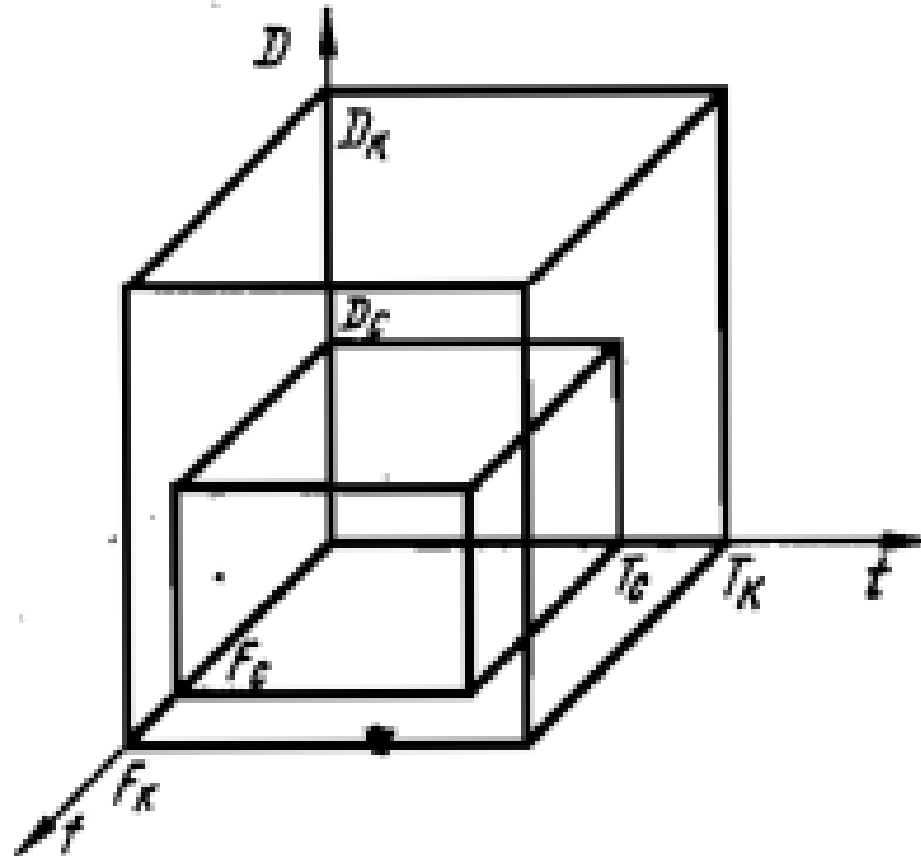
Добуток

$$V_k = T_k F_k D_k$$

прийнято називати ємністю сигналу.

На практиці як часові узагальнені характеристики використовують швидкість створення інформації R_c і швидкість передачі по каналу R_k .

Неспотворена передача сигналів можлива тільки за умови, що сигнал за своїм обсягом "вміщується" в ємність каналу:



Отже, загальна умова узгодження сигналу з каналом передачі інформації визначається співвідношенням:

$$T_c \leq T_k;$$

$$F_c \leq F_k;$$

$$D_c \leq D_k.$$

Максимальна швидкість передачі даних по певному каналу зв'язку називається **пропускною здатністю**.

Фактична швидкість передачі, яка може бути досягнута, залежить не тільки від ширини смуги сигналу, але і від шуму в каналі зв'язку.

Теорема Шеннона — Гартлі стверджує, що інформаційна ємність каналу C , що означає теоретичну верхню межу швидкості передачі даних через аналоговий канал зв'язку:

$$C = F_K \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right),$$

де F_K — смуга пропускання каналу, Гц;

S — повна потужність сигналу над смугою пропускання, Вт або V^2 ;

N — повна шумова потужність над смугою пропускання, Вт або V^2 (враховуючи, що електрична потужність дорівнює U^2/R).

Якщо швидкість передачі повідомлень менше пропускну здатності каналу зв'язку ($R < C$), то існують методи декодування такі, що ймовірність помилки декодування прямує до нуля, коли довжина блоку прямує до нескінченності. Якщо ж ($R > C$), то коду, на основі якого можна домогтися скільки завгодно малої ймовірності виникнення помилки, не існує.

Продуктивність джерела інформації

Продуктивність джерела інформації визначається середньою кількістю інформації, що виробляється джерелом за одиницю часу.

Максимальна кількість інформації має місце у випадку, коли апостеріорна невизначенність дорівнює нулю:

$$I_{\max} = H(x).$$

Нехай джерело створює n повідомлень на відрізок часу T в моменти часу t_i , для яких повідомлення x_i статистично не залежать одне від одного (не корельовані), то загальна ентропія дорівнює сумі ентропій:

$$H_T(X) = \sum_{i=1}^n H(x_i) = nH(x_i).$$

Загальна інформація, яка може бути створена у n повідомленнях

$$I_T = H_T(X) = nH(x_i).$$

Продуктивність джерела можна оцінити відношенням:

$$R_C = \frac{I_T}{T} = \frac{nH(x_i)}{T}.$$

Якщо повідомлення формуються через рівні проміжки часу Δt , то за час T їх кількість буде $n = T/\Delta t$. Тоді:

$$R_C = \frac{T}{\Delta t} \frac{H(x_i)}{T} = \frac{H(x_i)}{\Delta t}.$$

Пропускна спроможність каналу

Аналогічно, середня швидкість передачі інформації

визначається виразом

$$R_K = \frac{I_T}{T_K} = \frac{H_T(X)}{T_K}.$$

Верхня границя швидкості має місце тоді, коли ймовірності всіх повідомлень однакові та якщо прийняти, що $T \rightarrow \infty$:

$$C = \sup \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_T(X)}{T} \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log n}{T}.$$

Якщо рівень шумів (завад) малий, ними можна нехтувати і вважати, що канал працює без завад.

Таким чином, треба розглядати чотири типи каналів зв'язку:

- дискретний канал без завад;
- дискретний канал із завадами;
- неперервний канал без завад;
- неперервний канал із завадами.

Дискретний канал без завад

Кожному значенню x_i сигналу на вході каналу відповідає таке ж значення сигналу на виході z_j . Максимальна кількість інформації $I(Z/X) = H_{\max}(X) = \log n$.

Якщо для передачі елемента інформації x_i , що має ймовірність $P(x_i)$, потрібен час τ_i , то середній час передачі

$$\tau_{cp} = - \sum_i P(x_i) \tau_i.$$

Пропускна спроможність каналу:

$$C = \sup \left\{ \frac{H(X)}{\tau_{cp}} \right\} = \frac{\log n}{\tau_{cp}} = R_{cp} \log n,$$

де $R_{cp} = 1/\tau_{cp}$ — середня швидкість передачі одного елемента інформації.

Дискретний канал із завадами

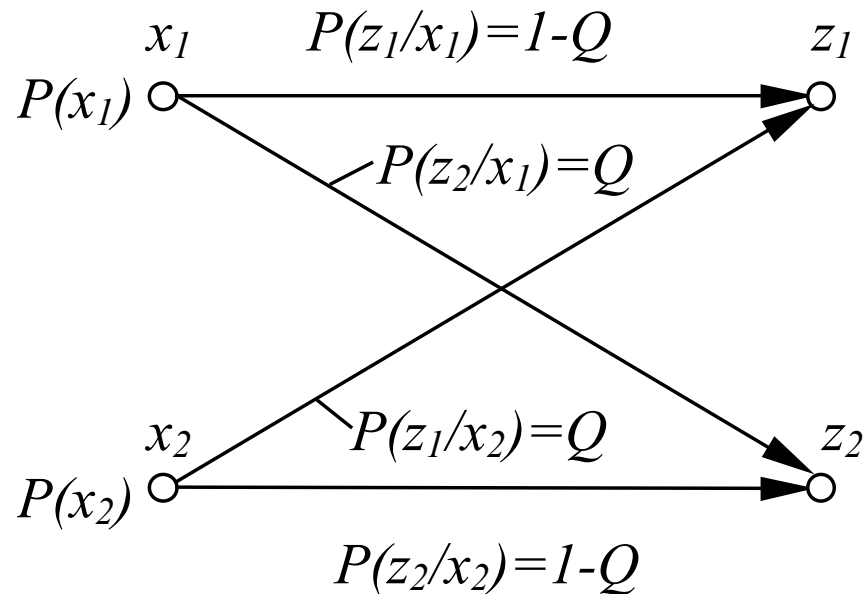
Кількість інформації треба оцінювати з врахуванням апостеріорної невизначенності:

$$I(Z / X) = H(X) - H(X / Z).$$

Для визначення верхньої границі швидкості передачі інформації треба визначити максимальну кількість інформації $I_{\max}(Z/X)$ за всіма можливими розподілами ймовірності, які характеризують джерело інформації. Пропускна спроможність каналу:

$$C = \sup \left\{ \frac{I(Z / X)}{\tau_{cp}} \right\} = R_{cp} I_{\max}(Z / X).$$

У випадку передачі інформації за допомогою двійкових кодів джерело інформації виробляє два значення сигналу $x_1=0$, $x_2=1$. На виході каналу можливі також два значення $z_1=0$, $z_2=1$. Якщо ймовірність помилки передачі позначити Q , можна побудувати граф перехідних ймовірностей:



Априорні ймовірності значень сигналу $P(x_1)=P(x_2)=0,5$. В силу симетричності графа апостеріорні ймовірності також будуть однакові: $P(z_1)=P(z_2)=0,5$. Матриця перехідних ймовірностей:

$$\|P(z_j / x_i)\| = \begin{vmatrix} Q & (1-Q) \\ (1-Q) & Q \end{vmatrix}$$

Кількість інформації розраховуємо за формулою:

$$I(Z / X) = -\sum_i P(x_i) \log P(x_i) + \sum_j P(z_j) \sum_i P(x_i / z_j) \log P(x_i / z_j).$$

Умовні ймовірності шукаємо згідно формули Байєса:

$$P(x_i / z_j) = \frac{P(x_i)P(z_j / x_i)}{P(z_j)}.$$

Оскільки $P(x_i)=P(z_j)$, то $P(x_i / z_j)=P(z_j / x_i)$. Підставимо значення усіх ймовірностей у формулу кількості інформації:

$$I(Z / X) = 1 + Q \log Q + (1 - Q) \log(1 - Q).$$

Неперервні канали

Неперервні канали використовуються для передачі неперервних повідомлень. Проте, оскільки неперервні сигнали підлягають операціям квантування за рівнем і дискретизації у часі, то при розрахунках пропускної спроможності їх можна розглядати як дискретні, число рівнів яких є рівним числу рівнів квантування

$$m = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{q} + 1,$$

а період слідування є рівним кроку дискретизації $\tau_{\text{ср}} = T_{\text{ц}}$, який розраховується згідно теореми Котельникова:

$$T_{\text{ц}} \leq \frac{1}{2f_c},$$

де f_c – найбільша частота спектра сигналу.

Тобто швидкість передачі імпульсів дискретизованого сигналу:

$$R_{cp} = \frac{1}{\tau_{cp}} = \frac{1}{T_u} = 2f_c.$$

При відсутності завад

$$I_{\max}(Z, X) = H_{\max}(X) = \log m = \log_2 \left(\frac{X_{\max} - X_{\min}}{q} + 1 \right).$$

Таким чином, пропускна спроможність неперервного каналу
без завад

$$C = 2f_c \log_2 \left(\frac{X_{\max} - X_{\min}}{q} + 1 \right).$$

При наявності завад треба враховувати апостеріорну
невизначеність:

$$I(Z / X) = h(X) - h(X / Z).$$

Пропускна спроможність неперервного каналу із завадами:

$$C = 2f_c [h(X) - h(X / Z)]_{\max}.$$