2.8 Модель системи у змінних стану

Якхо нам відомі процеси, що протікають у динамічному об’єкті, то його стан можна описати деякими змінними стану

$[x_1(\mathrm{t}), x_2(\mathrm{t}),.., x_n(\mathrm{t})]$.

У загальному випадку стан системи можна описати диференціальними рівняннями першого порядку відносно кожної зі змінних стану:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots + b_{1m}u_m, \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \ldots + b_{2m}u_m, \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots + b_{nm}u_m,
\end{aligned}$$

У цих рівняннях також врахований вплив на стан систему вхідних величин $u_i(t)$.

Наведені рівняння зручно представляти у матричній формі:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots b_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Компактно будемо представляти цей вираз так:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Матриця-стовпець, що складається зі змінних стану, називається вектором стану і має вигляд:

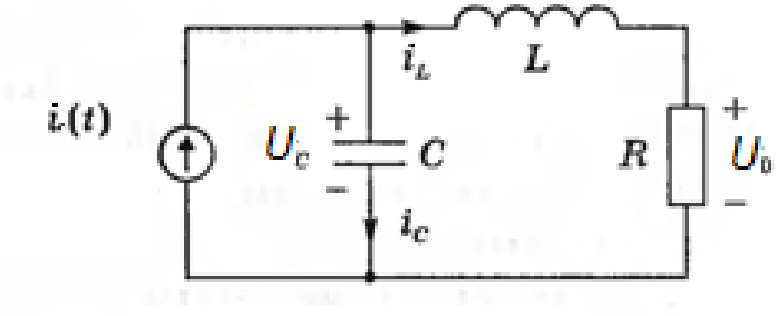
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Матриця **A** є квадратною розмірності *n×n*, а матриця **B** має розмірність *n×m.* Рівняння стану зв'язує швидкість зміни стану системи з самим станом і вхідними сигналами.

Аналогічно можна записати зв'язок вихідних сигналів лінійної системи з змінними стану і вхідними сигналами за допомогою рівняння виходу:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

Прикладом системи, яку можна описати змінними стану, є RLC-коло:



Для опису електричного кола число необхідних змінних стану дорівнює числу незалежних елементів, що накопичують енергію. Тут такими є конденсатор *C* і індуктивність *L*.

Стан RLC-кола характеризується двома змінними (x_1, x_2) де x_1 є напруга на конденсаторі $U_c(t)$, а x_2 — струм через індуктивність $I_L(t)$.

Загальна енергія, запасена в колі:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} L I_L^2 + \frac{1}{2} C U_C^2.$$

Струм через конденсатор:

$$I_C = C \frac{dU_C}{dt}.$$

Використовуючи закон Кирхгофа для струмів

$$I_C = I(t) - I_L,$$

отримаємо диференціальне рівняння:

$$C \frac{dU_C}{dt} = I(t) - I_L;$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C} I(t) - \frac{1}{C} I_L.$$

Напруга на індуктивності:

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt}.$$

Співвідношення напруг:

$$U_L = U_C - U_R = U_C - RI_L.$$

Отримаємо диференціальне рівняння:

$$L\frac{dI_L}{dt} = U_C - RI_L;$$

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{1}{L}U_C - \frac{R}{L}I_L.$$

Введемо позначення для змінних стану: $x_1=U_c(t)$, $x_2=I_L(t)$, $u(t)=I(t)$:.

Тоді наші диференціальні рівняння стану матимуть вигляд

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 .$$

Вихідний сигнал буде рівний:

$$y(t) = U_0 = RI_L(t).$$

З урахуванням уведених позначень:

$$y_1(t) = Rx_2 = 0x_1 + Rx_2.$$

Представимо отримані рівняння у матричній формі:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t);$$

$$y = [0 \quad \mathrm{R}]\, \mathbf{x}.$$

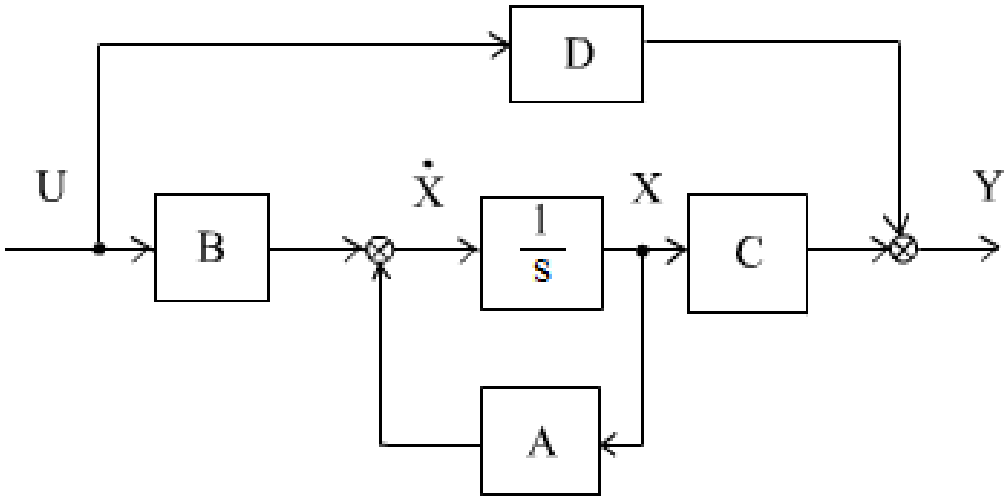
У загальному випадку модель у просторі станів представляється у матричній формі так:

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{AX}+\mathbf{BU};$$

$$\mathbf{Y}=\mathbf{CX}+\mathbf{DU}.$$

Вектор **X** характеризує стан системи, матриця **A** є матриця коефіцієнтів розмірності $n \times n$, **B** — матриця входу розмірності $n \times m$, **C** — матриця виходу розмірності $l \times n$, **D** — матриця обходу розмірності $l \times m$. Тут n – кількість змінних стану, m – кількість входів, l – кількість виходів.

Таку модель представляють структурною схемою:



Якщо обмежуватись розглядом систем з одним входом і одним виходом, тому в даному випадку $m=l=1$, а y і u є скалярними змінними.

Основними елементами моделі в просторі станів є вектор **X** і чотири матриці (**A**, **B**, **C**, **D**). Подібний опис як найкраще підходить для використання середовища MATLAB, в якому основною робочою одиницею є матриця. Синтаксис команди, що створює безперервну LTI-систему у вигляді ss-объекта с одним входом і одним виходом:

sys=ss(A, B, C, D).

Оскільки існують три підкласи LTI-об’єктів, необхідно мати функції для взаємного перетворення моделей. Перетворення виконується функціями **tf, ss і zpk**. Оператори перетворення мають наступний вигляд:

sys=tf(sys) – перетворення у підклас tf;

sys=zpk(sys) – перетворення у підклас zpk;

sys=ss(sys) – перетворення у підклас ss.

Для прикладу розглянемо систему третього порядку:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{2s^2+8s+6}{s^3+8s^2+16s+6}.$$

Створимо передатну функцію:

```
>> num=[2 8 6]; den=[1 8 16 6];
>> T=tf(num,den)
T =
    2 s^2 + 8 s + 6
  ----------------------
  s^3 + 8 s^2 + 16 s + 6
 Continuous-time transfer function.
```

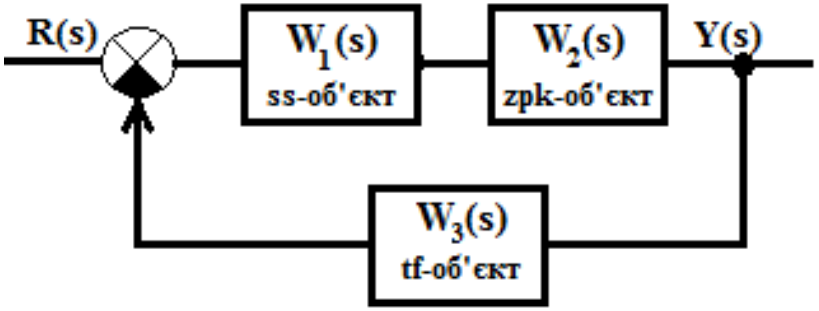
Здійснимо перехід від передатної функції до ss-моделі: T_ss=ss(T).

Результат отримуємо у вигляді чотирьох матриць:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-8 & -2 & -0{,}75\\ 8 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[1\ \ 0{,}5\ \ 0{,}375],\quad \mathbf{D}=[0].$$

2.9 Властивості LTI -объектов

При виконанні операцій підсумовування або замикання елементів системи зворотним зв'язком часто бере участь декілька LTI-объектів різних підкласів, наприклад:



Передатна функція системи:

$$W_p(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)}.$$

Виникає питання, якому підкласу належатиме результуючий об'єкт $W_p(s)$. Ця проблема вирішується введенням ієрархії об'єктів і відповідних правил пріоритету:

1 – ss;

2 – zpk;

3 – tf.

Операції з LTI-об'єктами матимуть результатом:

- об'єкт підкласу **ss**, якщо принаймні один операнд належить підкласу **ss**;
- об'єкт підкласу **zpk**, якщо відсутні операнди підкласу *ss* і принаймні один з операндів належить підкласу **zpk**;
- об'єкт підкласу **tf**, якщо усі операнди відносяться до підкласу **tf**.

Усі операнди **нижчого** пріоритету перед виконанням операції перетворюються в підклас операнда **вищого** пріоритету.

Для того, щоб сформувати дискретну модель із заданим періодом дискретності, просто треба до вхідних аргументів функцій tf, zpk і ss додати період дискретності **Ts**, вимірюваний в секундах:

sys = tf(num,den,Ts);

sys = zpk(z,p,k,Ts);

sys = ss(a,b,c,d,Ts).

LTI-об'єкти являють собою структури, які містять різну інформацію, наприклад, імена входів або примітки про історію моделі. Для того, щоб отримати інформацію про властивості LTI-об'єктів, використовують команду **ltiprops**. Властивості – це різні поля структури об'єктів, які мають імена і містять значення.

Розрізняють **родові властивості**, які є загальними для усіх трьох підкласів об'єктів, і **специфічні властивості**, які відносяться тільки до одного підкласу моделі.

Властивості, які є загальними для усіх трьох підкласів, перераховані в таблиці:

Властивість	Опис	Тип даних
InputName	Назви входів	Масив комірок
Notes	Інформація про історію моделі	Текст
OutputName	Назви виходів	Масив комірок
Ts	Період дискретності	Скаляр
Td	Запізнення на вході	Вектор
Userdata	Додаткові дані	Будь-які

Властивості **InputName, OutputName** описують призначення входів і виходів системи; для їх представлення використовуються рядки символів.

Властивість **запізнювання на вході** Td доступна тільки для неперервних систем, його представлення – вектор запізнювань для кожного вхідного каналу, виміряний в секундах; за умовчанням використовується нульове значення (відсутність запізнювання).

Властивість **Userdata** може містити числові дані про моделі, що описуються довільними типами даних. За умовчанням це поле є порожнім.

Специфічні властивості tf-об’єктів

Властивість	Опис	Тип даних
num	Чисельник(и) передатної функції	Вектор-рядок для одновимірної, масив комірок для багатовимірної передатної функції
Den	Знаменник(и) передатної функції	Вектор-рядок для одновимірної, масив комірок для багатовимірної передатної функції
Variable	Позначення змінної передатної функції	Символьна змінна з дозволеного набору символів «s», «p», «z», «q» або «z^-1»

Специфічні властивості zpk-об’єктів

Властивість	Опис	Тип даних
K	Узагальнений(і) коефіцієнт(и) посилень	Скапяр для одновимірної, двовимірний масив для багатовимірної системи
z	Нулі передатної функції	Вектор-рядок для одномірної, масив комірок для багатовимірної системи
p	Полюси передатної функції	Вектор-рядок для одномірної, масив комірок для багатовимірної системи
Variable	Позначення змінної передатної функції	Символьна змінна з дозволеного набору символів «s», «p», «z», «q» або «z^-1»

Специфічні властивості ss-об’єктів

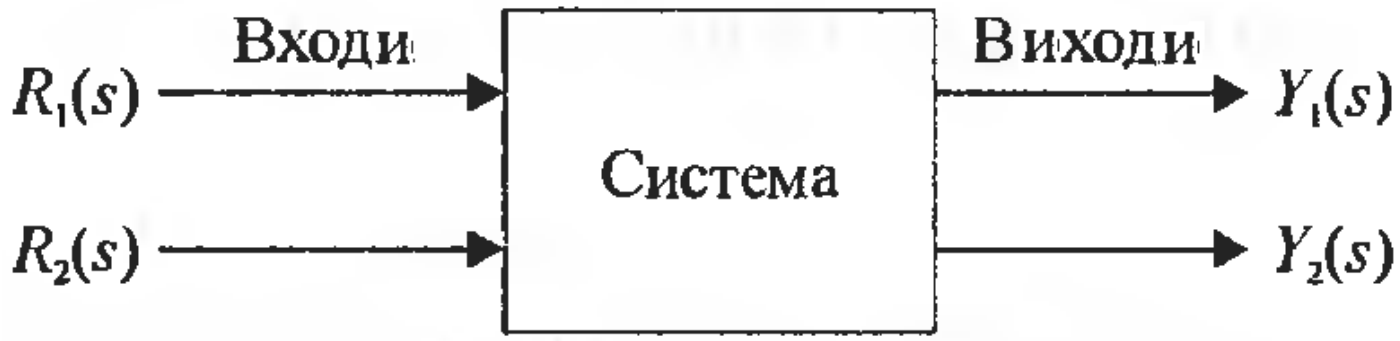
Властивість	Опис	Тип даних
A	Матриця станів	
B	Матриця вхід-стан	
C	Матриця вхід-стан-вихід	Двовимірна матриця
D	Матриця вхід-вихід	
E	Матриця при похідних	
StateName	Назви змінних станів	Масив комірок з рядків

Матриця при похідних E за умовчанням дорівнює порожній матриці [ ].

Властивість StateName дозволяє привласнити імена змінним стану.

2.10 Модель системи у вигляді структурної схеми

Структурні схеми складаються з блоків спрямованої дії, кожному з яких відповідає певна передатна функція. Для опису системи з декількома керованими змінними використовується структурна схема з перехресними зв'язками. Наприклад, в наступній системі є дві вхідні і дві вихідні змінні.



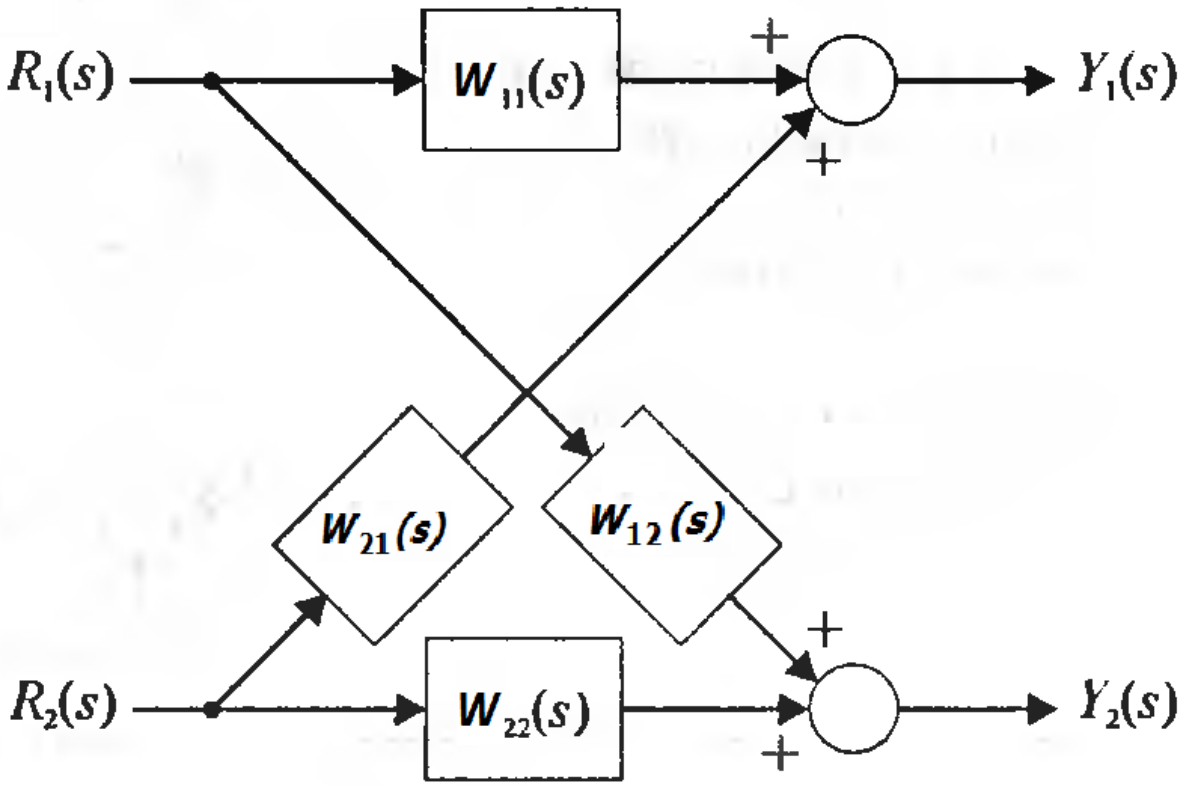
За допомогою передатних функцій ми можемо записати рівняння, що зв'язують ці змінні:

$$Y_1(s) = W_{11}(s)\, R_1(s) + W_{21} R_2(s);$$

$$Y_2(s) = W_{12}(s)\, R_1(s) + W_{22} R_2(s),$$

де W_{ij} — передатна функція від i-го входу до j-го виходу.

Структурна схема, що відображає записані вище рівняння:



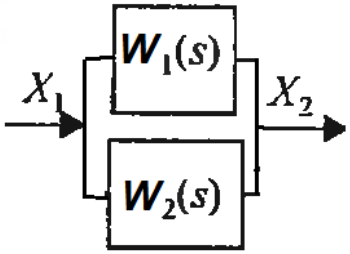
У загальному випадку, за наявності *I* входів і *J* виходів, рівняння, що зв'язують їх, можна записати в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{W}_{11}(s) & \dots & \underline{W}_{1J}(s) \\ \underline{W}_{21}(s) & \dots & \underline{W}_{2J}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{W}_{I1}(s) & \dots & \underline{W}_{IJ}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_J(s) \end{bmatrix},$$

або в компактному вигляді:

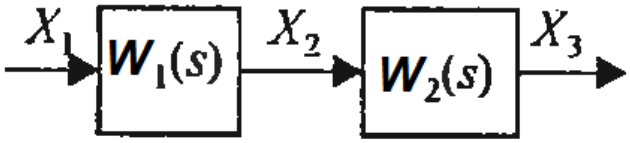
Y=WR.

Користуючись певними правилами, структурну схему складної системи можна спростити, звівши її до конфігурації з меншим числом блоків, ніж в початковій системі. При паралельному з'єднанні



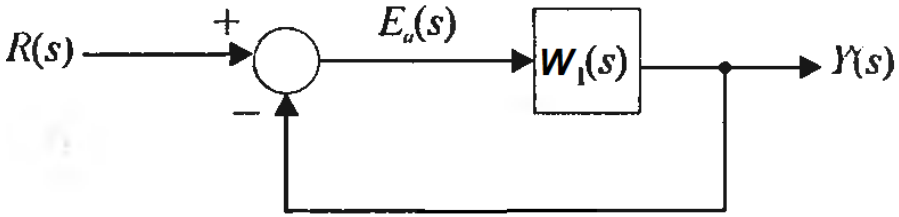
передатні функції підсумовуються: $W=W_1+W_2$.

При послідовному з'єднанні



передатні функції перемножуються: $W=W_1 \cdot W_2$.

Якщо блок охоплений негативним зворотним зв'язком



то сигнал помилки $\boldsymbol{E(s)=R(s)-Y(s)}$.

Вихід системи

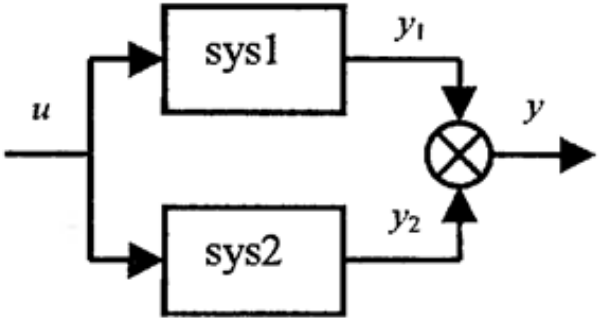
$$\boldsymbol{Y(s)=W_1(s)E(s)=W_1(s)(R(s)-Y(s))};$$

$$Y(s)=\frac{W_1(s)}{1+W_1(s)}R(s).$$

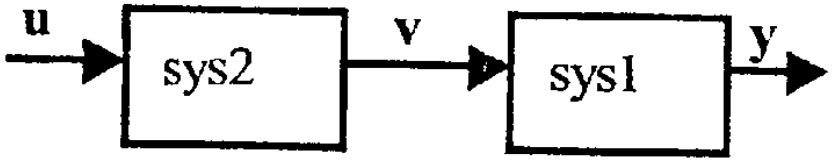
Передатна функція

$$W=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{W_1(s)}{1+W_1(s)}.$$

У Control System Toolbox структурні перетворення здійснюються наступним чином. Операція sys=sys1+sys2 повертає LTI -модель паралельного з'єднання:



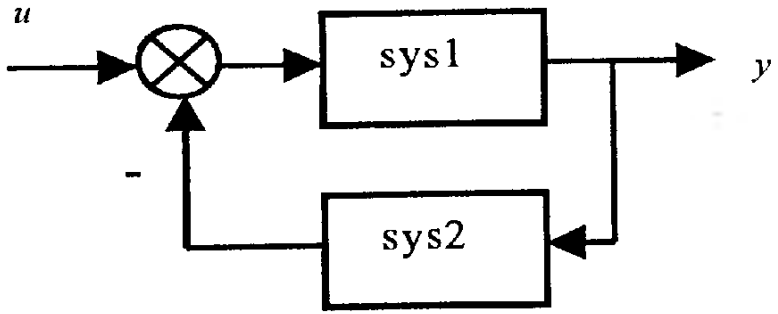
Операція sys=sys1*sys2 повертає LTI- модель для послідовного з'єднання систем:



Зверніть увагу на зворотний порядок слідування LTI-моделей sys1 і sys2 в операції множення і на структурній схемі. Якщо системи sys1 і sys2 мають передатні матриці W1, і W2, то справедливе наступне співвідношення:

y=W1*v= W1*(W2*u).

Функція sys = feedback(sys1, sys2) повертає LTI -модель з дескриптором sys, відповідну з'єднанню LTI -моделей sys1 і sys2 в контур з негативним зворотним зв'язком :



У MatLab є ряд вбудованих функцій, за допомогою яких можна виконувати структурні перетворення:

– **series(w1,w2)** – послідовне з'єднання динамічних ланок;

– **parallel(w1,w2)** – паралельне з'єднання динамічних ланок;

– **feedback(w1,w2)** – включення ланки w2 в контур негативного зворотного зв'язку до w1;

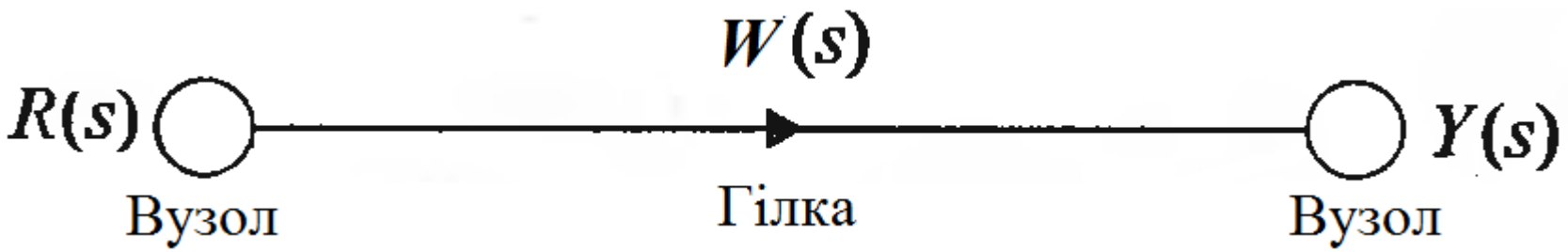
– **feedback(w1,w2,sign)** – включення ланки w2 в контур зворотного зв'язку ланки w1 з вказівкою знаку зворотного зв'язку «плюс» (sign=1**)** або «мінус» (sign=-1).

Очевидно, що feedback(w1,w2) теж саме, що feedback(w1,w2, –1).

2.11 Моделі у вигляді сигнальних графів

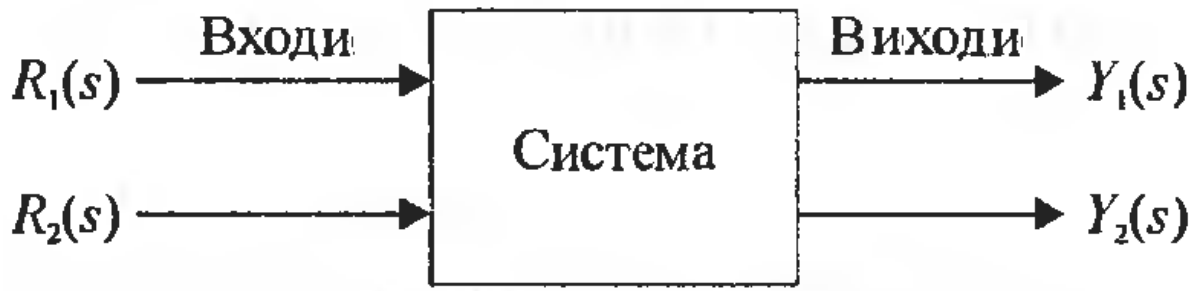
Сигнальний граф є діаграмою, що складається з вузлів, сполучених між собою окремими спрямованими гілками, і є графічним засобом опису лінійних співвідношень між змінними.

Основним елементом сигнального графа є однонапрямлений відрізок, званий гілкою, який відображає залежність між вхідною і вихідною змінною на кшталт того, як це робить окремий блок в структурній схемі. Точки входу і виходу гілок називаються вузлами.



Гілкам можуть бути поставлені у відповідність передатні функції, вузлам – вхідні і вихідні змінні.

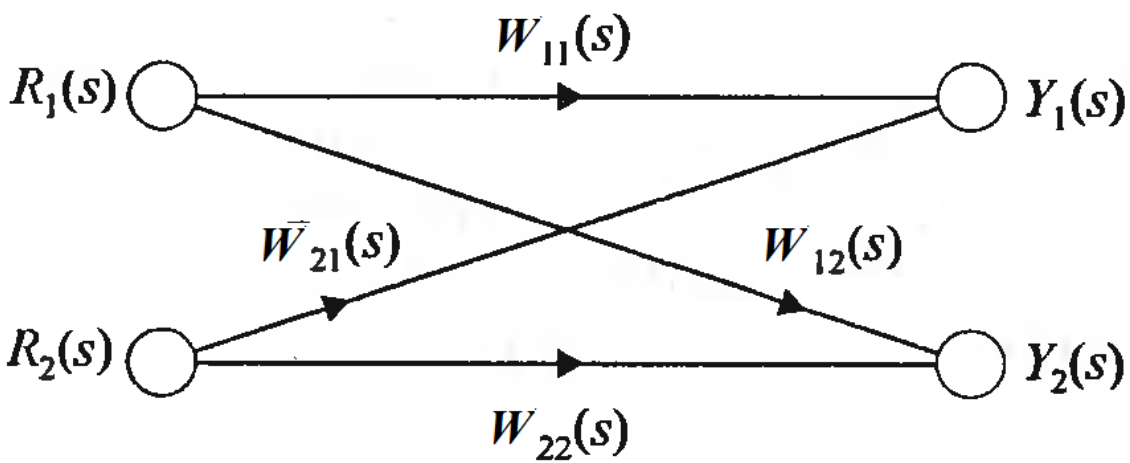
Для моделі системи у вигляді структурної схеми



яка описується рівняннями

$$Y_1(s) = W_{11}(s)\, R_1(s) + W_{21} R_2(s);$$
$$Y_2(s) = W_{12}(s)\, R_1(s) + W_{22} R_2(s),$$

можемо побудувати такий сигнальний граф:

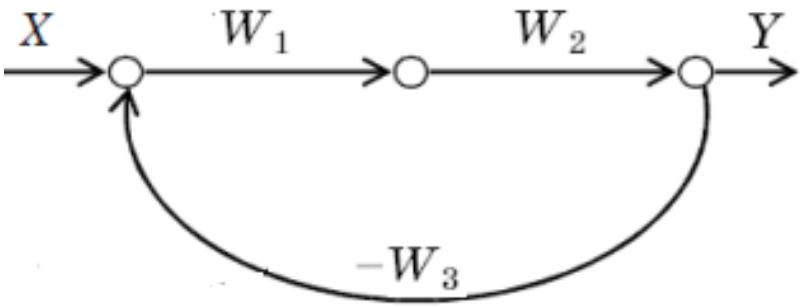


Сигнальний граф однозначно відповідає структурній схемі.

Деякі терміни

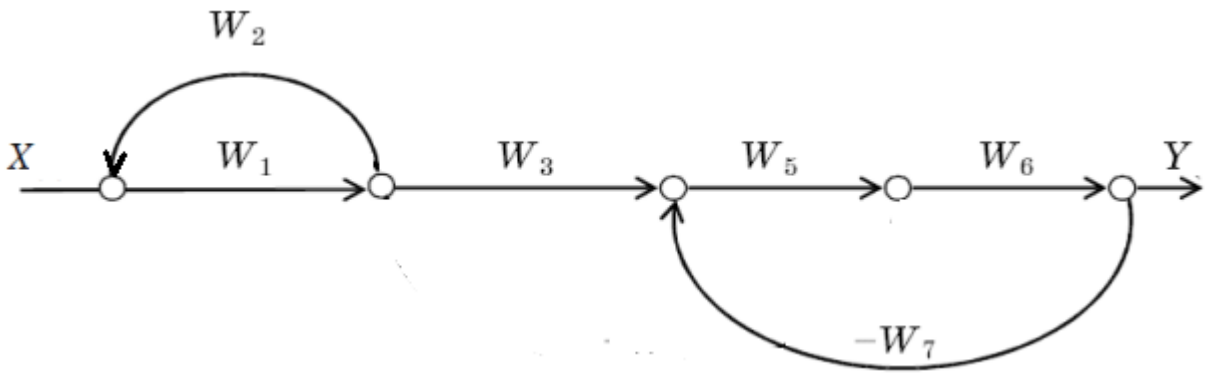
Шлях – це гілка або послідовність гілок, які можуть бути проведені від одного вузла до іншого.

Контур – це замкнутий шлях, який починається і закінчується в одному і тому ж вузлі, причому уздовж цього шляху жоден інший вузол не зустрічається двічі.

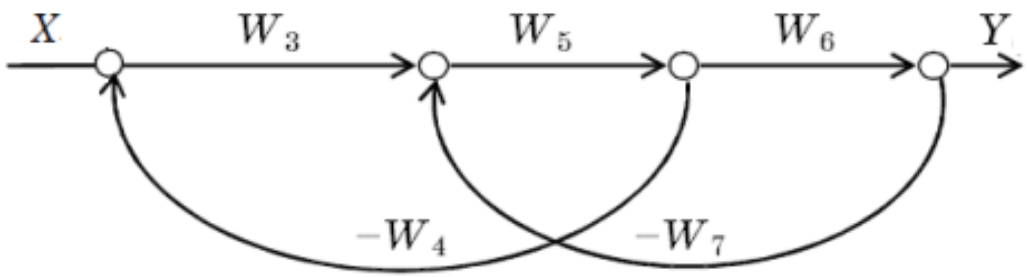


Коефіцієнт передачі контура - це добуток усіх дуг, що входять в нього.

Недотичними називають такі контури, які не мають загального вузла.



Дотичними є два контури, які мають один або більше загальних вузлів.



Нехай $X(s)$ и $Y(s)$ – вхідна і вихідна змінні системи. Тоді для обчислення передатної функції системи управління по її графові можна користуватися формулою Мейсона:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = W(s) = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \Delta_i}{\Delta},$$

де P_i – i-й шлях від входу до виходу;

N – кількість шляхів;

Δ – визначник графа;

Δ_i – додатковий множник для i-го шляху.

Підсумовування виконується по усіх можливих шляхах від входу до виходу.

Визначник графа розраховується за формулою:

$$\Delta = 1 - \sum_{k=1}^{K} L_k + \sum_{m=1,q=1}^{M,Q} L_m L_q - \sum_{r=1,s=1,l=1}^{R,S,L} L_r L_s L_l + \ldots,$$

де $\sum_{k=1}^{K} L_k$ – сума коефіцієнтів передачі усіх окремих контурів;

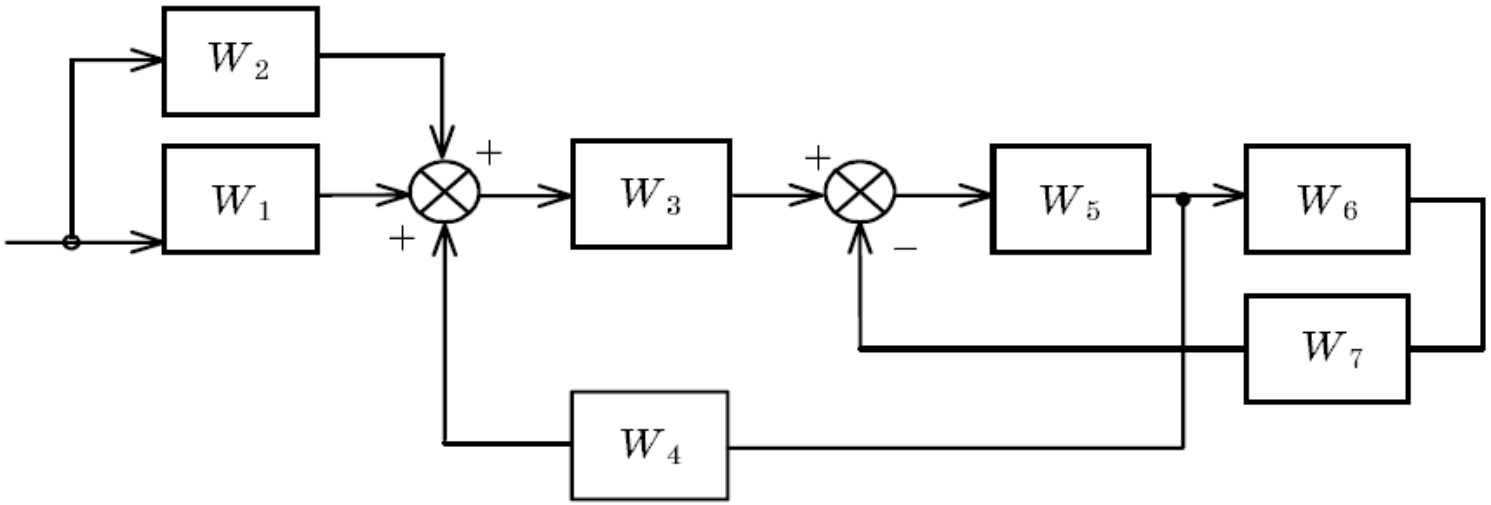
$\sum_{m=1,q=1}^{M,Q} L_m L_q$ – сума добутків усіх можливих комбінацій з двох недотичних контурів;

$\sum_{r=1,s=1,l=1}^{R,S,L} L_r L_s L_l$ – сума добутків усіх можливих комбінацій з трьох недотичних контурів і т.д.

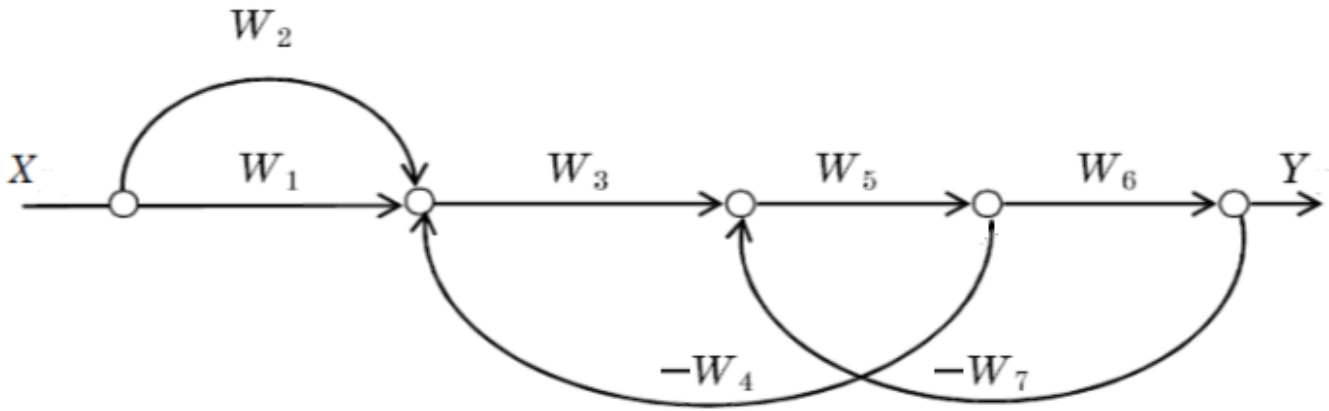
Додатковий множник Δ_i для *i*-го шляху дорівнює визначникові графа, в якому прирівняні нулю коефіцієнти передачі контурів, дотичних цього шляху.

Застосування формули Мейсона є більш ефективним, ніж використання структурних перетворень.

Розглянемо приклад отримання передатної функції багатоконтурної системи з використанням формули Мейсона для наступної структури:



Для цієї системи побудуємо сигнальний граф.



Від входу до виходу ведуть два шляхи:

$P_1 = W_1 W_3 W_5 W_6$,

$P_2 = W_2 W_3 W_5 W_6$.

У графі є два контури:

$$L_1 = -W_3 W_5 W_4$$
$$L_2 = -W_5 W_6 W_7.$$

Контур L_1 дотичний контуру L_2 і немає недотичних контурів, тому визначник графа обчислюється за формулою:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2).$$

Контури в даному прикладі дотичні до усіх шляхів, тому додаткові множники шляхів

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1.$$

Остаточно можна записати:

$$W(s) = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{W_1 W_3 W_5 W_6 + W_2 W_3 W_5 W_6}{1 - W_3 W_5 W_4 - W_5 W_6 W_7}.$$

Комп'ютерне моделювання з використанням сигнальних графів може бути виконане за допомогою тулбоксу Stateflow. Stateflow – інструмент для чисельного моделювання систем, що характеризуються складною поведінкою. До таких систем належать гібридні системи – це системи із складною взаємодією дискретної і неперервної динаміки.

Для представлення сигнального графа його вузли задаються за допомогою елементів, що мають назву Connective Junction, а зв'язки між ними – за допомогою ліній зв'язку. Важливою складовою моделювання графа є блок "State" (стан), який описує режим керованої подіями системи за допомогою спеціальної мови нотацій.