

Завдання 5. Псевдообернена матриця і її використання

Експериментальні методи визначення статичних характеристик систем можуть мати результатом алгебраїчне рівняння, що зв'язує між собою шукані характеристики x_1, x_2, \dots, x_n наступним чином:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

де a і b – деякі коефіцієнти.

Щоб знайти всі n параметри x_i , треба провести n експериментів і розв'язати систему з n лінійних алгебраїчних рівнянь.

Проте вважаючи на те, що отримання експериментальних даних супроводжується похибками вимірювання, а результати досліджень можуть спотворюватись неконтрольованими завадами, дослідники збільшують кількість експериментів понад необхідне число n , щоб мати більше інформації про досліджувану систему. В результаті в розпорядженні дослідники опиняється система з m рівнянь, де $m > n$, і всіх їх бажанно врахувати.

У матричній формі система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАУ) може бути записана у вигляді $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Рішення СЛАУ в матричній формі запису представляється вираженням:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

де \mathbf{A}^{-1} – матриця, зворотна до матриці \mathbf{A} . Її називають оберненою матрицею. Обернена матриця існує для кожної не виродженої квадратної матриці \mathbf{A} , розмірності $n \times n$, причому:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I},$$

де \mathbf{I} – одинична $n \times n$ матриця.

У нашому випадку маємо СЛАР, а відповідно і матрицю \mathbf{A} розмірністю $m \times n$. Але якщо матриця прямокутна, то класична обернена матриця не існує. Тоді вводять узагальнення — матрицю, яка зберігає найважливіші властивості обернення в коректній формі. Використовують псевдообернену матрицю, яку позначають як \mathbf{A}^+ . Для її розрахунку використовують вираз:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T.$$

Задача. Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3, \end{cases}$$

у якій коефіцієнти задаються згідно варіанту:

№ вар.	a_{11}	a_{12}	b_1	a_{21}	a_{22}	b_2	a_{31}	a_{32}	b_3
20	3	5	15	3	1	6	1	-1	0
	3	1	6	3	1	7	2	-1	1

виконати наступні дії.

1. Побудувати графіки рівнянь СЛАР.
2. За допомогою використання математичного апарату обчислення псевдооберненої матриці розв'язати задані в завданні СЛАР.
3. Розмістити на площинах з зображенням графіків рівнянь СЛАР координати знайдених розв'язків СЛАР.

Розв'язування

1. У вікні консолі Scilab вводимо вихідні дані:

```
--> a11=3;a12=5;b1=15;a21=3;a22=1;b2=6;a31=1;a32=-1;b3=0;
```

Будуємо графік першого рівняння $x_1 = (b_1 - a_{12}x_2) / a_{11}$:

```
--> x2=0:0.1:7; x1=(b1-a12*x2)/a11;
```

```
--> plot(x1,x2);xgrid
```

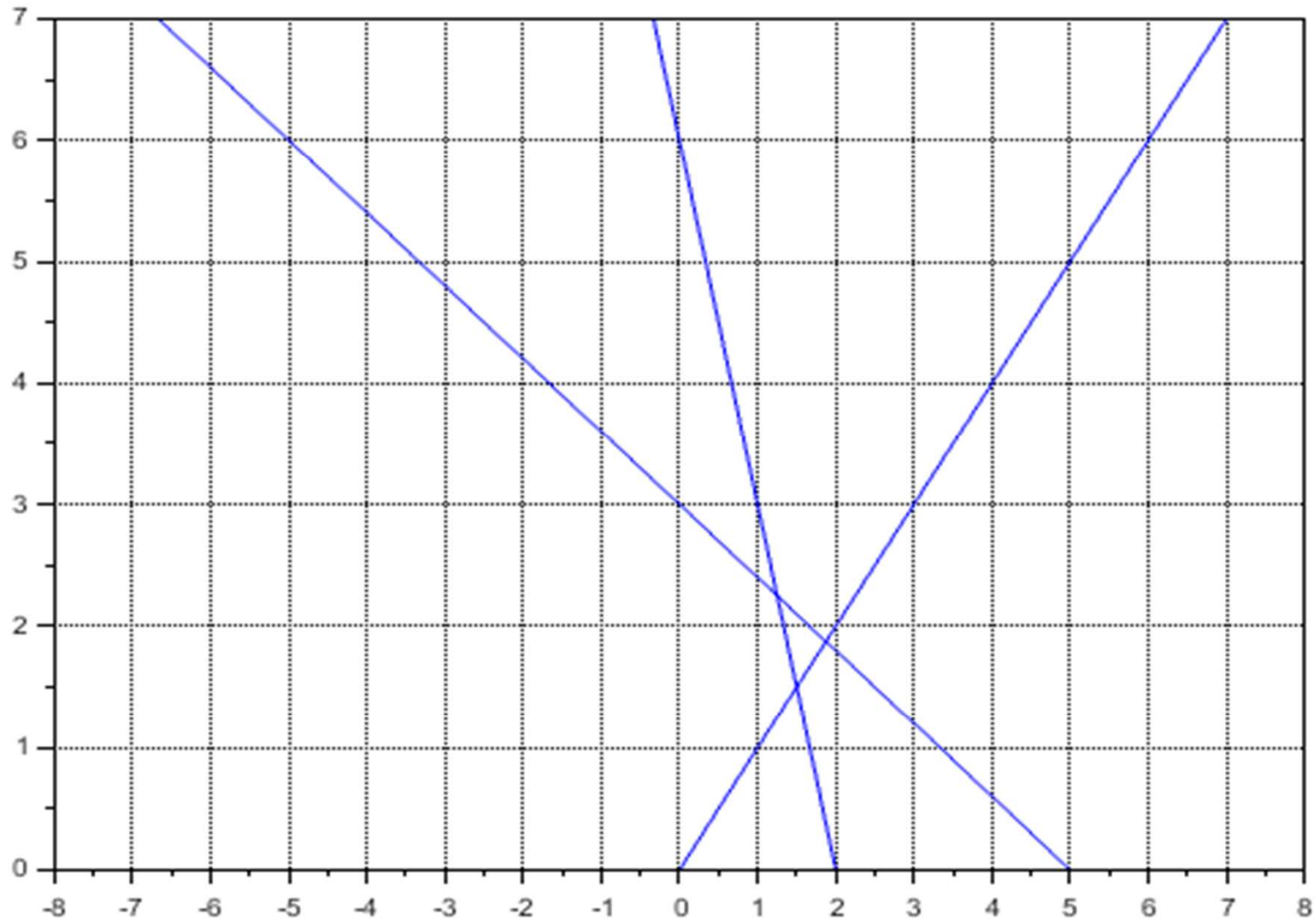
Будуємо графік другого рівняння $x_1 = (b_2 - a_{22}x_2) / a_{21}$ в тих же координатах:

```
--> x1=(b2-a22*x2)/a21; plot(x1,x2)
```

Будуємо графік третього рівняння $x_1 = (b_3 - a_{32}x_2) / a_{31}$ в тих же координатах:

```
--> x1=(b3-a32*x2)/a31; plot(x1,x2)
```

Отримуємо графіки:



2. Створюємо матриці x , A та B :

--> $A = [a_{11} \ a_{12}; a_{21} \ a_{22}; a_{31} \ a_{32}]$

$A = [3 \times 2 \text{ double}]$

3. 5.

3. 1.

1. -1.

--> $B = [b_1; b_2; b_3]$

$B = [3 \times 1 \text{ double}]$

15.

6.

0.

Далі виконаємо розрахунки $[(A^+ = (A^T \cdot A)^{-1}) \cdot A^T; x = A^+ \cdot b$:

--> $A_{plus} = (A' * A)^{-1} * A'$;

--> $x = A_{plus} * B$


$x = [2 \times 1 \text{ double}]$

1.4464286

2.0892857

3. Розміщуємо на графіку точку, що відповідає результату розв'язання СЛАР, для зображення використовуємо символ «зірочка»:

```
--> plot(x(2),x(1),"*");
```

Для зображення на графіку числових значень координат цієї точки натискаємо кнопку , підводимо до точки курсор і клікаємо мишею.

Завдання 6. Елементи інтервального аналізу

Традиційні методи синтезу систем управління припускають, що моделі об'єкту і регулятора відомі і вони мають постійні параметри. Проте модель реальної динамічної системи завжди буде неточною з наступних причин:

- через зміну параметрів з часом та внаслідок змін зовнішніх умов;
- не враховані в моделі динамічні властивості;
- не враховане запізнювання за часом;
- шум датчика;
- непередбачувані зовнішні збурення

Система, що має допустимі відхилення якості при зміні або неточності її моделі, називається **робасною**. Метою синтезу робасної системи є гарантія необхідної якості управління незалежно від перелічених факторів.

Робасна система управління має необхідну якість незважаючи на істотну невизначеність характеристик об'єкта управління.

Розглянемо систему, що включає потенційні невизначеності.

Від робастної системи вимагається, щоб вона:

- мала низьку чутливість до чинників, які не враховані при її синтезі;
- зберігала стійкість при деякій зміні параметрів;
- задовольняла вимогам до її якості в досить широкому діапазоні зміни її параметрів.

Робасність, по суті, характеризується чутливістю системи до чинників, які не враховувалися на етапах аналізу і синтезу, наприклад, до збурень, шуму датчика і не врахованих у моделі системи параметрів, що впливають на її динаміку. Система має бути здатна протидіяти впливу цих чинників при виконанні завдань, заради яких вона проектувалася.

Види невизначеності

Невизначеність існує в у будь-якій моделі об'єкта, оскільки математична модель об'єкта, отримана на основі теорії або в результаті ідентифікації, відрізняється від реальної технічної системи. У ході створення моделі завжди приймаються деякі спрощення, допущення. Розробники систем СУ стикаються з проблемою невідповідності якості роботи спроектованої системи тим очікуванням, які на неї поклалися. Причинами тому є прийняття такої моделі за істину. Таким чином, модель з урахуванням невизначеностей точніше описує реальний об'єкт, що дозволяє розробити кращу систему керування.

Відома велика кількість способів обліку невизначеності. Відповідно розроблена і велика кількість методів аналізу і синтезу робасних систем.

Виділяються наступні основні види математичного апарату опису моделі невизначеності:

- класична статистика (стохастична модель);
- інтервальний аналіз (інтервальна модель);
- нечіткі множини ("розмита" модель).

Багато дослідників вважають, що стохастичний підхід відкриває широкі можливості для **свавілля**. Крім того, при цьому передбачається, що випадкові величини мають нормальний розподіл. Таке припущення не позбавлене підстав, наприклад, при моделюванні фізичних процесів, але абсолютно не обгрунтовано у цілому ряді випадків.

Нині стохастичний підхід використовується переважно в завданнях управління економічними системами.

Параметрична невизначеність. Якщо модель описує фізичний об'єкт, то як правило, його параметри не відомі точно, при чому в багатьох випадках їх значення в принципі не можуть бути доступні, оскільки вони можуть змінюватись в процесі експлуатації. В таких випадках можна говорити про параметричну невизначеність.

Параметрично невизначеною моделлю називають систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(q)\mathbf{x} + \mathbf{B}(q)\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(q)\mathbf{x} + \mathbf{D}(q)\mathbf{u}, \end{cases}$$

де матриці **A**, **B**, **C**, **D** залежать від параметра q , який належить заданій допустимій множині **Q** (множині невизначеності). Потрібно сказати, що сама система рівнянь залишається стаціонарною, тобто параметри q не змінюються з часом, однак конкретні їх значення не відомі. Відомо лише, те що вони лежать в певній множині **Q**. Аналогічним чином при описі системи за допомогою передатних функцій її елементи можуть залежати від параметрів, тобто передатна функція об'єкта набуває вигляду:

$$W(s, q) = \frac{A(s, q)}{B(s, q)},$$

де $A(s, q)$, $B(s, q)$ – поліноми, коефіцієнти $a_j(q)$, $b_j(q)$ яких залежать від параметра q .

Один з підходів, що якнайповніше відпрацьований стосовно рішення задачі синтезу робасних систем, використовує поняття систем з **параметричною інтервальною невизначеністю** або інтервальних систем (IS). У таких системах параметри задаються не числами, а діапазонами їх можливих значень - інтервалами. Інтервалом називається область значень будь-якого параметра системи, обмежена з обох сторін. Письмово інтервал зазвичай позначається літерою латинського алфавіту, укладеною у квадратні дужки; верхня і нижня межі інтервалу позначаються тією ж літерою з рискою над або під нею відповідно:

$$[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$$

Вочевидь, що коефіцієнти передатної функції робастної системи, отже, і коефіцієнти її характеристичного полінома, залежить від інтервальних параметрів.

Інтервальний характеристичний поліном (ІХП) – знаменник передатної функції робастної СУ. Це характеристичний поліном, коефіцієнти якого залежать від інтервальних параметрів системи.

Залежно від того, як саме коефіцієнти ІХП залежить від інтервальних параметрів, розрізняють кілька видів невизначеностей ІХП:

- інтервальну;
- афінну;
- поліноміальну.

Найпростіший тип невизначеності – інтервальна невизначеність. Наприклад, інтервальний характеристичний поліном динамічної системи задається таким чином:

$$P(s) = \left\{ P(s) = \sum_{i=0}^n [a_i] \cdot s^i; \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, \underline{a}_n > 0 \right\}.$$

Тут інтервальними параметрами є коефіцієнти полінома a_i .

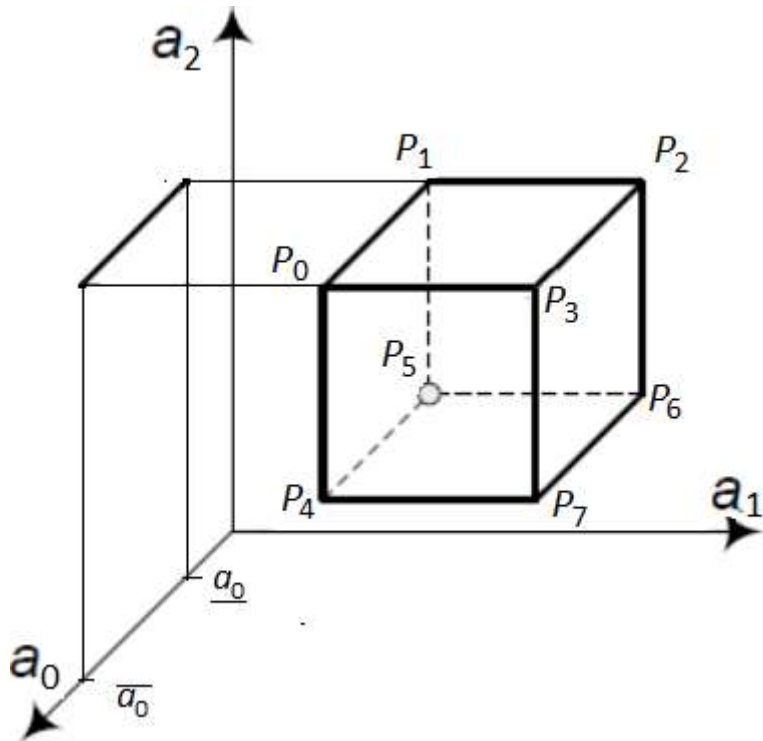
Аналіз і синтез ІС виконується шляхом дослідження поведінки системи при різних комбінаціях граничних значень параметрів \underline{a}_i та \overline{a}_i . У розгляд вводиться багатовимірний многогранник (зазвичай паралелепіпед) в просторі параметрів. Вершини паралелепіпеда відповідають комбінаціям граничних значень. Вирішується завдання пошуку умов стійкості для значень параметрів, що відповідають вершинам або ребрам паралелепіпеда.

Приклад

Розглянемо інтервальну передатну функцію другого порядку:

$$W(s) = \frac{1}{[a_2] \cdot s^2 + [a_1] \cdot s + [a_0]}$$

Режим роботи такої системи повністю визначається сукупністю трьох інтервальних параметрів: $[a_0]$, $[a_2]$, $[a_1]$. Відповідно сукупність можливих режимів обмежується тривимірним паралелепіпедом.



Вершина P_0 має координати $\bar{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_2$;
вершина P_1 має координати $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \bar{a}_2$
і так далі.

Ребро P_1P_0 відповідає зміні параметра a_0 від його нижньої границі до верхньої.

Інтервальна арифметика

Сумою інтервальних чисел $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$ і $[b] = [\underline{b}, \bar{b}]$ називається інтервальне число $[d] = [\underline{d}, \bar{d}]$, граничні значення якого \underline{d} і \bar{d} розраховуються за допомогою наступних співвідношень.

Для отримання нижньої границі $[d]$ треба перебрати суми всіх пар граничних значень чисел $[a]$ і $[b]$, тобто $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \bar{b}$, $\bar{a} + \underline{b}$, $\bar{a} + \bar{b}$ і вибрати з них найменше. Очевидно, це буде $\underline{a} + \underline{b}$.

Аналогічно для верхньої границі треба взяти максимальну суму, тобто $\bar{a} + \bar{b}$.

Таким чином, правило суммування інтервальних чисел:

Сумою $[a] + [b]$ є число $[d]$, граничні значення якого

$$\begin{aligned}\underline{d} &= \underline{a} + \underline{b}; \\ \bar{d} &= \bar{a} + \bar{b}.\end{aligned}$$

Подібним чином установеимо, що мінімальною серед різниць

$\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \bar{b}$, $\bar{a} - \underline{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$ буде $\underline{a} - \bar{b}$, а найбільшою $\bar{a} - \underline{b}$.

Тож правило віднімання:

Різницею $[a] - [b]$ є число $[d]$, граничні значення якого

$$\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{a}} - \overline{\overline{b}};$$
$$\overline{\overline{d}} = \overline{\overline{a}} - \underline{\underline{b}}.$$

Що стосується операцій множення і ділення, то неможливо передбачити, яка з пар добутків і відношень буде мінімальною, а яка максимальною. Доводиться перебирати всі пари. Тому правило

множення:

Добутком $[a] \cdot [b]$ є число $[d]$, граничні значення якого

$$\underline{\underline{d}} = \min(\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{a}} \cdot \overline{\overline{b}}, \overline{\overline{a}} \cdot \underline{\underline{b}}, \overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}});$$
$$\overline{\overline{d}} = \max(\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{a}} \cdot \overline{\overline{b}}, \overline{\overline{a}} \cdot \underline{\underline{b}}, \overline{\overline{a}} \cdot \overline{\overline{b}}).$$

Правило ділення:

Часткою від ділення $[a] : [b]$ є число $[d]$, граничні значення якого

$$\underline{\underline{d}} = \min(\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{a}} : \overline{\overline{b}}, \overline{\overline{a}} : \underline{\underline{b}}, \overline{\overline{a}} : \overline{\overline{b}});$$
$$\overline{\overline{d}} = \max(\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{a}} : \overline{\overline{b}}, \overline{\overline{a}} : \underline{\underline{b}}, \overline{\overline{a}} : \overline{\overline{b}}).$$

Примітка: операція ділення визначена лише в тому випадку, якщо інтервал-діленьник не містить граничних значень, рівних нулю.

Задача. Задані інтервальні числа: $[a] = [-3, 1]$ та $[b] = [1, 4]$. Треба знайти: $[a] + [b]$, $[b] - [a]$, $[a] \cdot [b]$, $[a]:[b]$, $[b]:[b]$, $[a] - [a]$.

Розв'язування

$$[a] + [b] = [-3, 1] + [1, 4] = [-3 + 1, 1 + 4] = [-2, 5].$$

$$[b] - [a] = [1, 4] - [-3, 1] = [1 - 1, 4 - (-3)] = [0, 7].$$

$$\begin{aligned} [a] \cdot [b] &= [-3, 1] \cdot [1, 4] = \\ &= [\min(-3 \cdot 1, -3 \cdot 4, 1 \cdot 1, 1 \cdot 4), \max(-3 \cdot 1, -3 \cdot 4, 1 \cdot 1, 1 \cdot 4)] = [-12, 4]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a] : [b] &= [-3, 1] : [1, 4] = \\ &= [\min(-3:1, -3:4, 1:1, 1:4), \max(-3:1, -3:4, 1:1, 1:4)] = [-3, 1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [b] : [b] &= [1, 4] : [1, 4] = \\ &= [\min(1:1, 1:4, 4:1, 4:4), \max(1:1, 1:4, 4:1, 4:4)] = [0.25, 4]. \end{aligned}$$

$$[a] - [a] = [-3, 1] - [-3, 1] = [-3 - 1, 1 - (-3)] = [-4, 4].$$

Завдання 7. Отримання передатної функції моделі в змінних стану

Знайти передатну функцію в змінних стану для наступної моделі:

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = 2x_1(t) - 7x_2(t) + 5u(t), & x_1(0) = 8, \\ dx_2(t)/dt = 4x_1(t) - 9x_2(t) - 3u(t), & x_2(0) = 5, \end{cases}$$

$$y(t) = 7x_1(t) - 2x_2(t).$$

Алгоритм 1

Передатну функцію знаходимо за матричною формулою:

$$W = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},$$

де матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} та \mathbf{C} мають наступні значення:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [7 \quad -2].$$

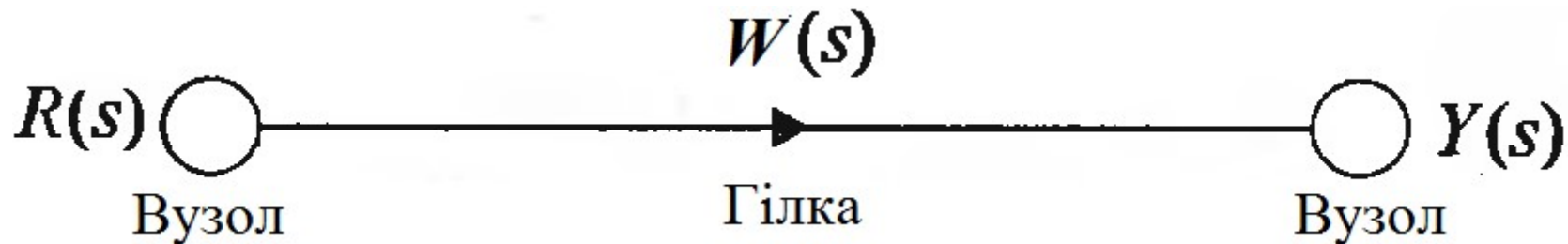
Замість зворотної матриці $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ можна використати приєднану матрицю. Для її отримання при розмірі матриць 2×2 можна в матриці $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ поміняти місцями елементи головної та знаки побочної діагоналей.

Алгоритм 2

Передатну функцію знаходимо за допомогою апарату сигнальних графів (формула Мезона).

Сигнальний граф є діаграмою, що складається з вузлів, сполучених між собою окремими спрямованими гілками, і є графічним засобом опису лінійних співвідношень між змінними.

Основним елементом сигнального графа є однонаправлений відрізок, званий гілкою, який відображає залежність між вхідною і вихідною змінною на кшталт того, як це робить окремий блок в структурній схемі. Точки входу і виходу гілок називаються вузлами. Гілкам можуть бути поставлені у відповідність передатні функції, вузлам – вхідні і вихідні змінні.

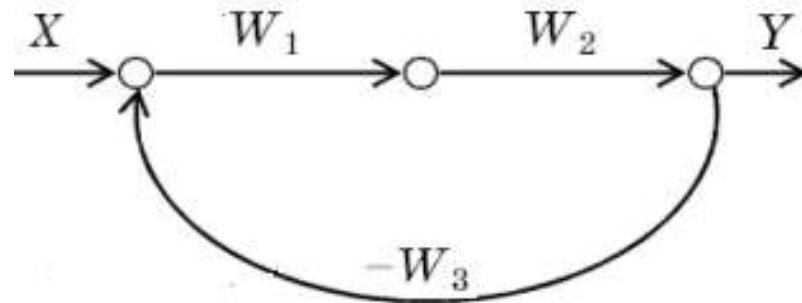


Сигнальний граф однозначно відповідає структурній схемі.

Деякі терміни

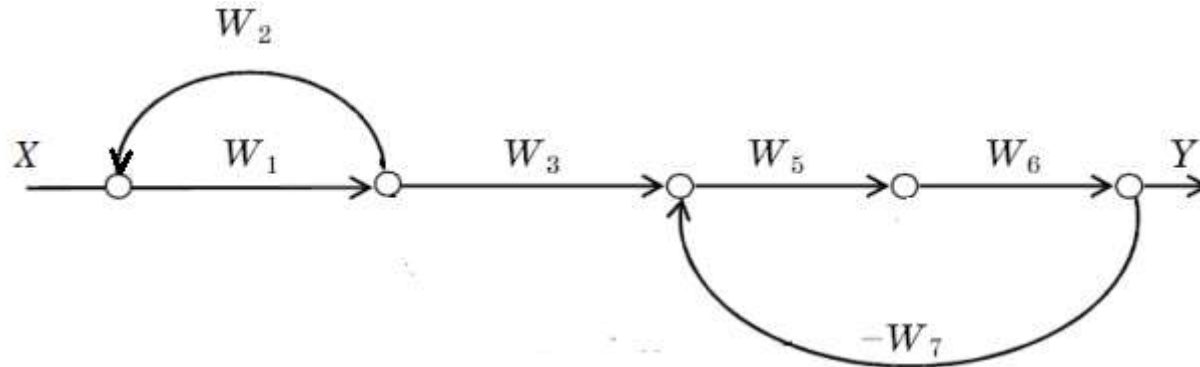
Шлях – це гілка або послідовність гілок, які можуть бути проведені від одного вузла до іншого.

Контур – це замкнутий шлях, який починається і закінчується в одному і тому ж вузлі, причому уздовж цього шляху жоден інший вузол не зустрічається двічі.

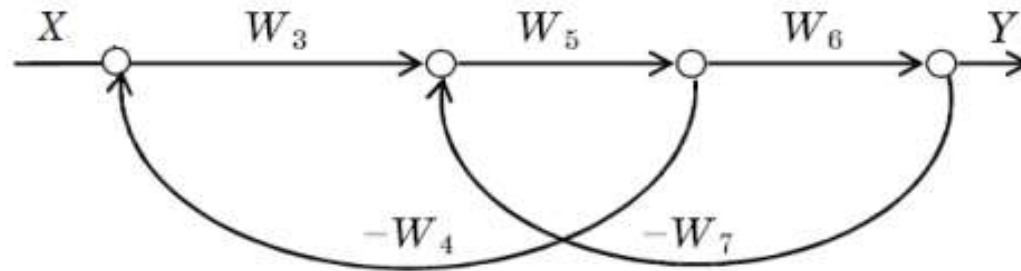


Коефіцієнт передачі контура - це добуток усіх дуг, що входять в нього.

Недотичними називають такі контури, які не мають загального вузла.



Дотичними є два контури, які мають один або більше загальних вузлів.



Нехай $X(s)$ и $Y(s)$ – вхідна і вихідна змінні системи. Тоді для обчислення передатної функції системи управління по її графові можна користуватися формулою Мейсона:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = W(s) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \Delta_i}{\Delta},$$

де P_i – i -й шлях від входу до виходу;

N – кількість шляхів;

Δ – визначник графа;

Δ_i – додатковий множник для i -го шляху.

Підсумовування виконується по усіх можливих шляхах від входу до виходу.

Визначник графа розраховується за формулою:

$$\Delta = 1 - \sum_{k=1}^K L_k + \sum_{m=1, q=1}^{M, Q} L_m L_q - \sum_{r=1, s=1, l=1}^{R, S, L} L_r L_s L_l + \dots,$$

де $\sum_{k=1}^K L_k$ – сума коефіцієнтів передачі усіх окремих контурів;

$\sum_{m=1, q=1}^{M, Q} L_m L_q$ – сума добутків усіх можливих комбінацій з двох недотичних контурів;

$\sum_{r=1, s=1, l=1}^{R, S, L} L_r L_s L_l$ – сума добутків усіх можливих комбінацій з трьох недотичних контурів і т.д.

Додатковий множник Δ_i для i -го шляху дорівнює визначникові графа, в якому прирівняні нулю коефіцієнти передачі контурів, дотичних цього шляху.

Задача 7. Використовуючи алгоритм 1 та алгоритм 2, відповідно до свого варіанту розрахувати передатну функцію в змінних стану заданої математичної моделі :

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t), & x_1(0) = x_{10}, \\ dx_2(t)/dt = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t), & x_2(0) = x_{20}, \\ y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t). \end{cases}$$

Розв'язування за алгоритмом 1

Розглянемо варіант

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = 2x_1(t) - 7x_2(t) + 5u(t), & x_1(0) = 8, \\ dx_2(t)/dt = 4x_1(t) - 9x_2(t) - 3u(t), & x_2(0) = 5, \\ y(t) = 7x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

Зі системи рівнянь випишемо основні матриці:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad C = [7 \quad -2].$$

Передатна функція обчислюється за формулою:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

де I – одинична матриця розміром 2x2. У Scilab вона створюється командою `eye(2,2)`.

З рівняння виходу бачимо, що $D = 0$.

Створюємо сценарій.

```
// 1. Задаємо початкові матриці системи
A = [2, -7; 4, -9]; B = [5; -3]; C = [7, -2]; D = 0;
// Початкові умови
x0 = [8; 5];
disp("--- Початкова система ---");
disp("A =", A, "B =", B, "C =", C, " x0 =", x0);
// 3. Знаходимо характеристичний поліном (знаменник)
s = poly(0, 's'); // Задаємо символічну змінну 's'
den= det(s*eye(2,2) - A);
disp("Характеристичний поліном (знаменник):", den);
```

```
// 4. Знаходимо чисельник передатної функції
// Використовуємо приєднану матрицю adj(sI - A) для 2x2
adj_matrix = [s - A(2,2), A(1,2); A(2,1), s - A(1,1)];
num = C * adj_matrix * B;
disp("Чисельник передатної функції :", num);
// 5. Створюємо передатну функцію
W = syslin('c', num, den);
disp("Передатна функція :", W);
```

Алгоритм 1а (удосконалений)

```
// 1. Матриці системи
A = [2, -7; 4, -9]; B = [5; -3];
// Розширена матриця C: [x1; x2; y]
C = [1, 0; // рядок для x1
0, 1; // рядок для x2
7, -2]; // рядок для y (7*x1 - 2*x2)
D = [0; 0; 0];
```

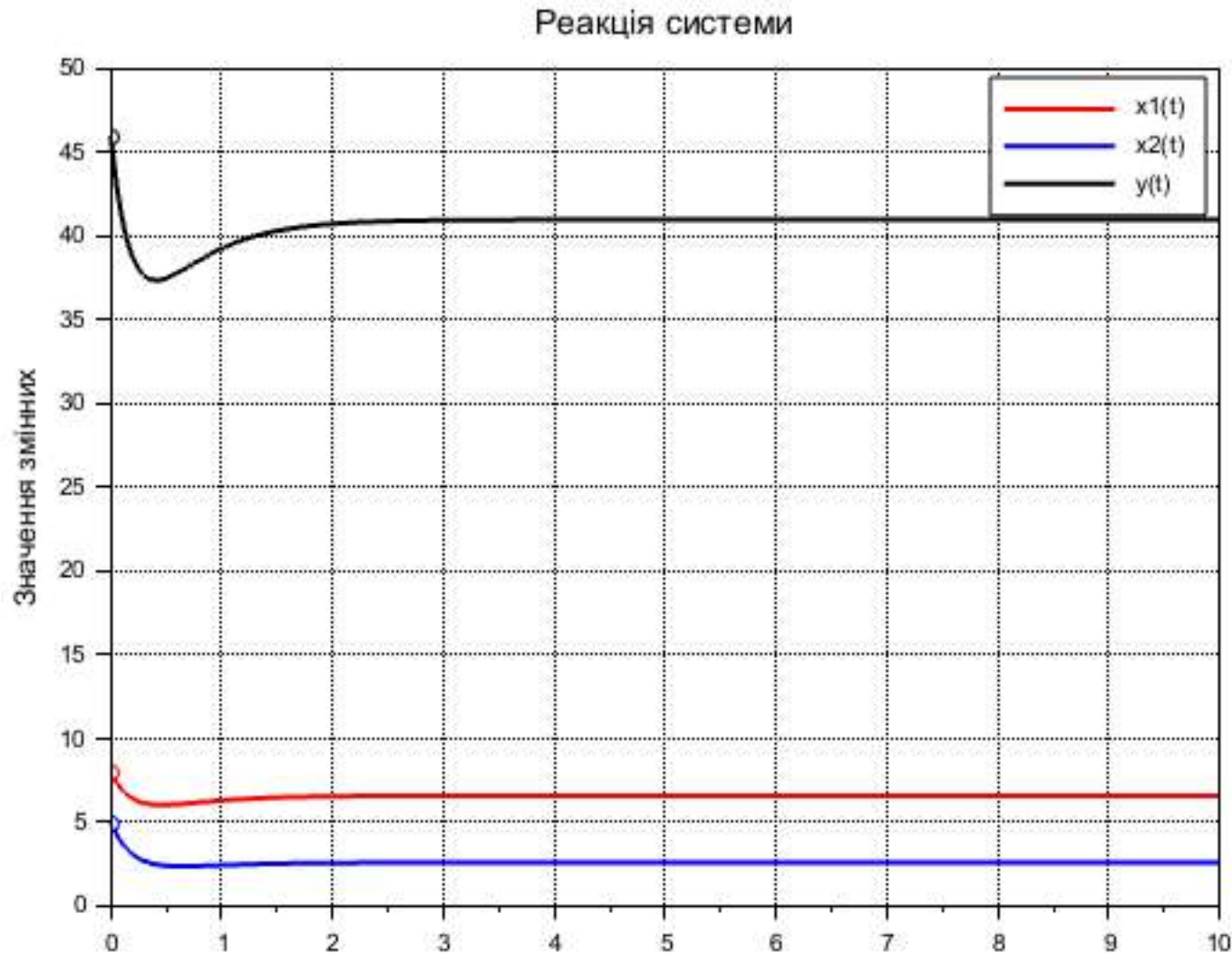
```
// 2. Створення системи
sys = syslin('c', A, B, C, D);
// 3. Параметри симуляції
x0 = [8; 5];
t = 0:0.01:10;
u_step = ones(1, length(t)); // Вхід u(t) = 1
// 4. Симуляція
res = csim(u_step, t, sys, x0);
// 5. Побудова графіка
clf();
plot(t, res(1,:), 'r', 'LineWidth', 2); // x1
plot(t, res(2,:), 'b', 'LineWidth', 2); // x2
plot(t, res(3,:), 'k--', 'LineWidth', 2); // y / Позначимо початкові точки
для наочності
plot(0, 8, 'ro'); // x1(0)=8
plot(0, 5, 'bo'); // x2(0)=5
plot(0, 46, 'ko'); // y(0) = 7*8 - 2*5 = 46
```

// 6. Оформлення графіків

```
hl = legend(['x1(t)'; 'x2(t)'; 'y(t)']);
```

```
xtitle("Реакція системи ", "t", "Значення змінних");
```

```
xgrid();
```



Пояснення для графіків

Згідно умови задачі початкові значення: $x_1(0)=8$, $x_2(0)=5$,

$$y(0) = 7 \cdot x_1(0) - 2 \cdot x_2(0) = 7 \cdot 8 - 2 \cdot 5 = 46$$

На початку ($t=0$):

Значення на графіку мусять бути рівними нашим $x_1(0)=8$, $x_2(0)=5$, $y(0)=46$. Вони позначені кружечками.

В процесі ($t > 0$):

Приблизно після 3 с вплив значень $x_1(0)=8$, $x_2(0)=5$ практично зникне, і система "забуде" свій початковий стан, повністю підкорившись вхідному сигналу. Система переходить до усталеного стану, який диктується входом u .

В кінці ($t \rightarrow \infty$):

Початкові умови вже не впливають на результат, графік виходить на «плато». Система прийде до значень:

$$x_1 \approx 6.6$$

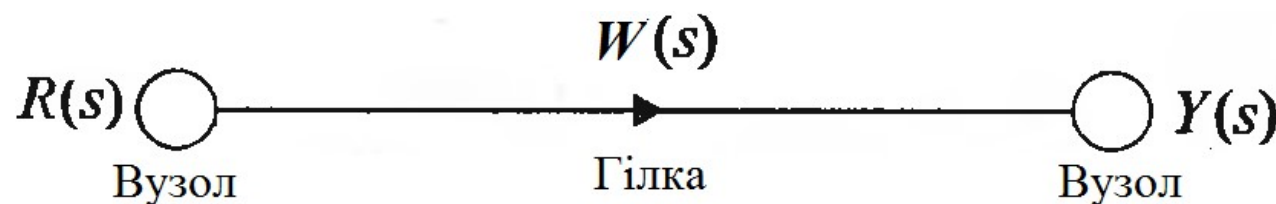
$$x_2 \approx 2.6$$

$$y \approx 41$$

Алгоритм 2

1. Сигнальний граф системи

На сигнальному графі показують потоки сигналів. **Вузли**, які зображають кружками, відповідають входу u , похідним станів \dot{x} , самим змінним стану x (після інтегрування $1/s$) та виходу y . **Гілкам**, які з'єднують вузли, поставлені у відповідність передатні функції



Шлях – це гілка або послідовність гілок, які можуть бути проведені від одного вузла до іншого.

Контур – це замкнутий шлях, який починається і закінчується в одному і тому ж вузлі, причому уздовж цього шляху жоден інший вузол не зустрічається двічі.

Коефіцієнт передачі контура – добуток усіх дуг, що входять в нього.

Недотичними називають такі контури, які не мають загального вузла. **Дотичними** є два контури, які мають один або більше спільних вузлів.

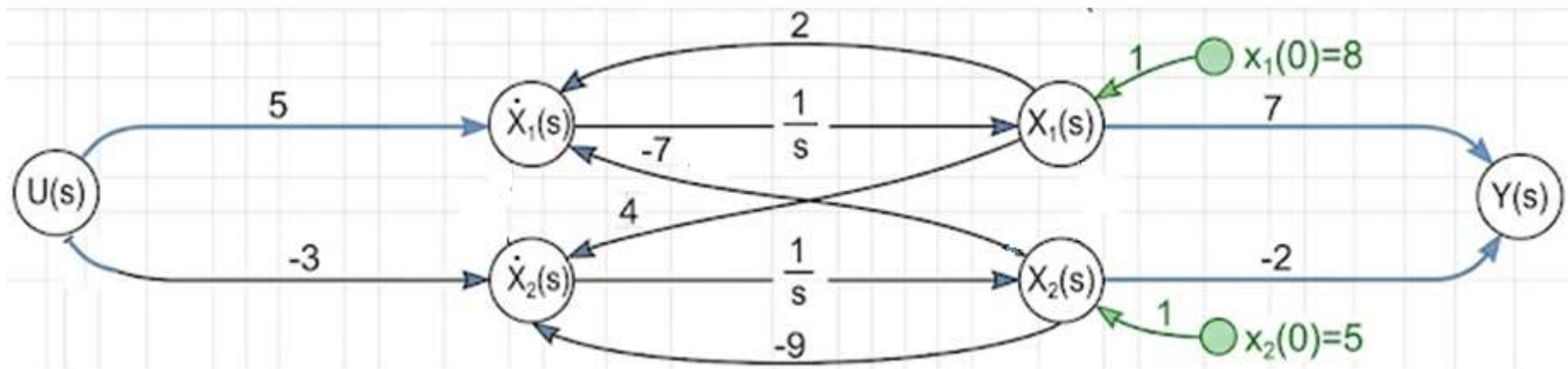
Виконаємо перетворення Лапласа до рівнянь нашої системи:

$$\dot{X}_1(s) = 2 X_1(s) - 7 X_2(s) + 5 U(s) + x_1(0),$$

$$\dot{X}_2(s) = 4 X_1(s) - 9 X_2(s) - 3 U(s) + x_2(0),$$

$$Y(s) = 7 X_1(s) - 2 X_2(s).$$

Будуємо сигнальний граф:



Ось опис зв'язків (дуг):

Вхідні: від U до \dot{X}_1 (ПФ=5) та до \dot{X}_2 (ПФ= -3).

Інтегратори: від \dot{X}_1 до X_1 (ПФ=1/s) та від \dot{X}_2 до X_2 (ПФ=1/s).

Зворотні зв'язки: від X_1 до \dot{X}_1 (ПФ=2) та від X_2 до \dot{X}_2 (ПФ= -9).

Перехресні зв'язки: від X_1 до \dot{X}_2 (ПФ=4) та від X_2 до \dot{X}_1 (ПФ= -7).

Вихідні: від X_1 до Y (ПФ=7) та від X_2 до Y (ПФ = -2).

Для обчислення передатної функції системи управління по її сигнальному графові використовують формулу Мейсона:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = W(s) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i \Delta_i}{\Delta},$$

де P_i – i -й шлях від входу до виходу;

N – кількість шляхів;

Δ – визначник графа;

Δ_i – додатковий множник для i -го шляху.

Підсумовування виконується по усіх можливих шляхах від входу до виходу.

Визначник графа розраховується за формулою:

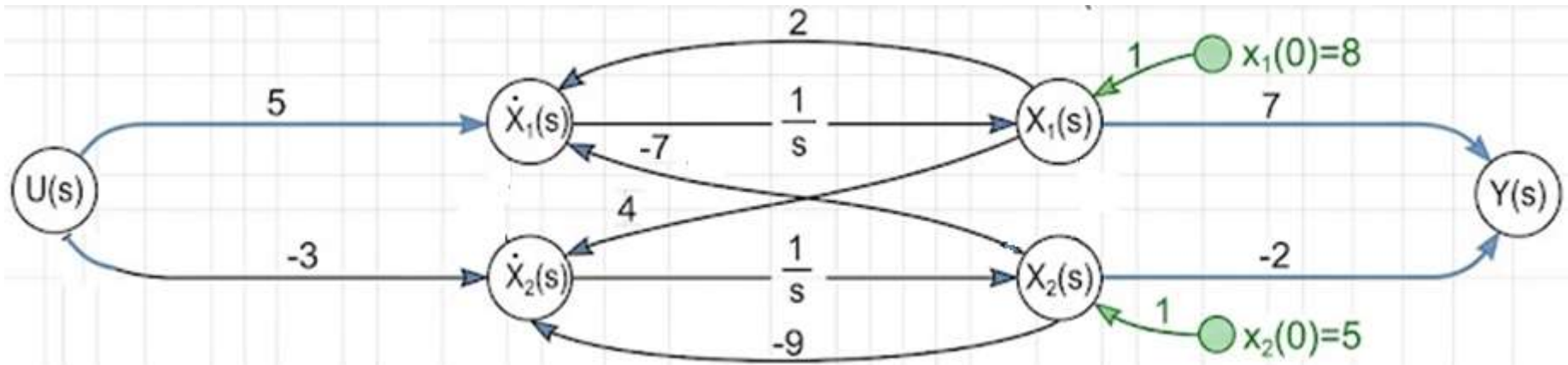
$$\Delta = 1 - \sum_{k=1}^K L_k + \sum_{m=1, q=1}^{M, Q} L_m L_q - \sum_{r=1, s=1, l=1}^{R, S, L} L_r L_s L_l + \dots,$$

де $\sum_{k=1}^K L_k$ – сума коефіцієнтів передачі усіх окремих контурів;

$\sum_{m=1, q=1}^{M, Q} L_m L_q$ – сума добутків усіх можливих комбінацій з двох недотичних контурів;

$\sum_{r=1, s=1, l=1}^{R, S, L} L_r L_s L_l$ – сума добутків усіх можливих комбінацій з трьох недотичних контурів і т.д.

Додатковий множник Δ_i для i -го шляху дорівнює визначникові графа, в якому прирівняні нулю коефіцієнти передачі контурів, **дотичних** до цього шляху.



Від входу до виходу ведуть такі шляхи.

1. Шлях $U \rightarrow \dot{X}_1 \rightarrow X_1 \rightarrow Y$:

$$P_1 = 5 \cdot 1/s \cdot 7 = 35/s.$$

2. Шлях $U \rightarrow \dot{X}_2 \rightarrow X_2 \rightarrow Y$:

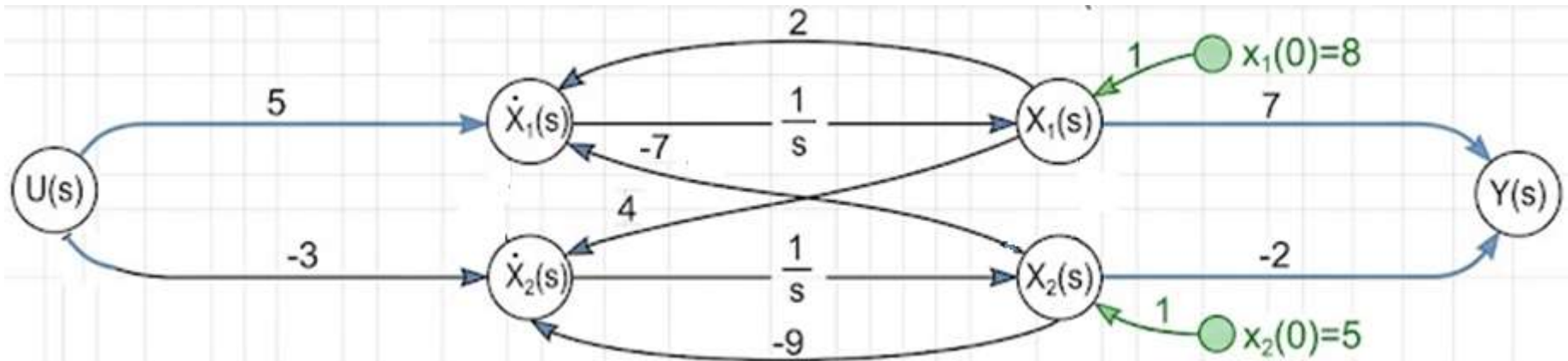
$$P_2 = (-3) \cdot 1/s \cdot (-2) = 6/s.$$

3. Шлях $U \rightarrow \dot{X}_1 \rightarrow X_1 \rightarrow \dot{X}_2 \rightarrow X_2 \rightarrow Y$:

$$P_3 = 5 \cdot 1/s \cdot 4 \cdot 1/s \cdot (-2) = -40/s^2.$$

3. Шлях $U \rightarrow \dot{X}_2 \rightarrow X_2 \rightarrow \dot{X}_1 \rightarrow X_1 \rightarrow Y$:

$$P_4 = (-3) \cdot 1/s \cdot (-7) \cdot 1/s \cdot 7 = 147/s^2.$$



У графі є три контури.

1. Контур $\dot{X}_1 \rightarrow X_1 \rightarrow \dot{X}_1$:

$$L_1 = 1/s \cdot 2 = 2/s.$$

2. Контур $\dot{X}_2 \rightarrow X_2 \rightarrow \dot{X}_2$:

$$L_2 = 1/s \cdot (-9) = -9/s.$$

3. Контур $\dot{X}_1 \rightarrow X_1 \rightarrow \dot{X}_2 \rightarrow X_2 \rightarrow \dot{X}_1$:

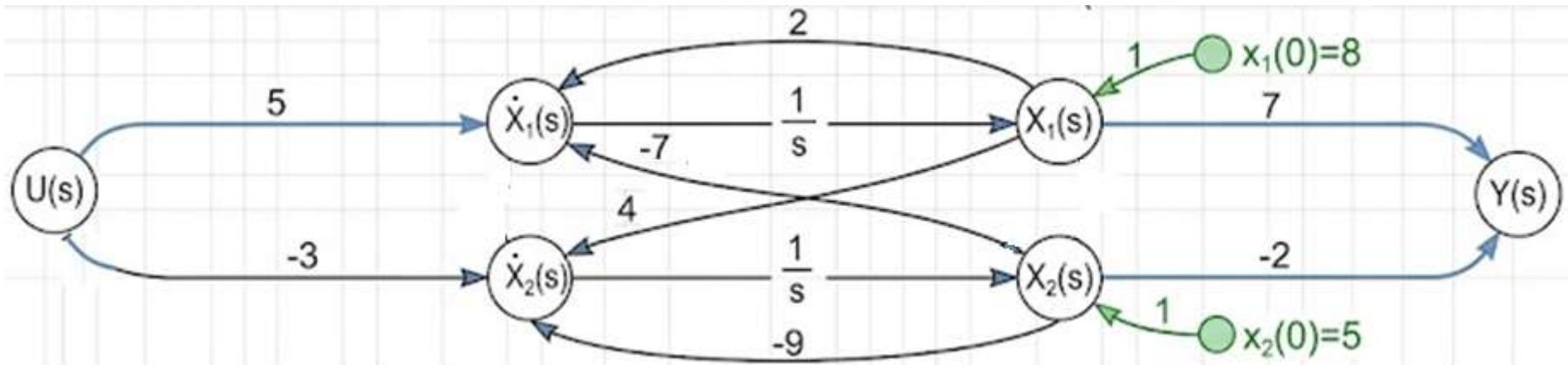
$$L_3 = 1/s \cdot 4 \cdot 1/s \cdot (-7) = -28/s^2.$$

Оскільки контури L_1 та L_2 є недотичними, визначник графа:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1 \cdot L_2)$$

$$\Delta = 1 - \left(\frac{2}{s} - \frac{9}{s} - \frac{28}{s^2} \right) + \left(\frac{2}{s} \cdot \frac{-9}{s} \right) = 1 + \frac{7}{s} + \frac{28}{s^2} - \frac{18}{s^2} = 1 + \frac{7}{s} + \frac{10}{s^2}$$

$$\Delta = \frac{s^2 + 7s + 10}{s^2}$$



Додаткові множники

1. Шлях $U \rightarrow \dot{X}_1 \rightarrow X_1 \rightarrow Y$. Він торкається контурів L_1 і L_3 , їх ми виключаємо з виразу для визначника Δ :

$$\Delta_1 = 1 - L_2 = 1 - (-9/s) = 1 + 9/s.$$

2. Шлях $U \rightarrow \dot{X}_2 \rightarrow X_2 \rightarrow Y$ торкається контурів L_2 і L_3 :

$$\Delta_2 = 1 - L_1 = 1 - 2/s.$$

3. Шлях $U \rightarrow \dot{X}_1 \rightarrow X_1 \rightarrow \dot{X}_2 \rightarrow X_2 \rightarrow Y$ торкається до всіх контурів:

$$\Delta_3 = 1.$$

3. Шлях $U \rightarrow \dot{X}_2 \rightarrow X_2 \rightarrow \dot{X}_1 \rightarrow X_1 \rightarrow Y$ торкається до всіх контурів:

$$\Delta_4 = 1.$$

Підставляємо все у формулу Мейсона.

Чисельник:

$$\sum P_k \Delta_k = \frac{35}{s} \left(1 + \frac{9}{s}\right) + \frac{6}{s} \left(1 - \frac{2}{s}\right) - \frac{40}{s^2} + \frac{147}{s^2} = \frac{41s + 410}{s^2}.$$

Ділимо на Δ :

$$W(s) = \frac{41s + 410}{s^2 + 7s + 10}$$