3.2 Аналіз стійкості лінійних систем

3.2.1 Аналіз стійкості за розташуванням коренів характеристичного рівняння

Стійку систему визначають як систему, що має обмежену реакцію. Інакше кажучи, якщо система піддається дії обмеженого вхідного сигналу або збурення і її реакція також є обмеженою по модулю, то таку систему називають стійкою. Якщо реакція необмежено збільшується по модулю, система є нестійкою.

Математично лінійна система є стійкою тоді і тільки тоді, якщо інтеграл в нескінченних межах від абсолютного значення її імпульсної перехідної функції $\int_0^\infty |g(t)|dt$ є кінцевим.

Рух динамічної системи визначається диференціальним рівнянням, яке в операторній формі має вигляд

$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0)U(s)$$

Права частина рівняння визначає вимушений рух системи під впливом вхідної величини u(s), ліва частина описує поведінку вихідної величини y(s), тобто власний рух системи. Тому множник

$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)$$

називають характеристичним рівнянням системи. Саме корені характеристичного рівняння, яке стоїть у знаменнику передатної функції, визначають власний рух системи. Ці корені, що називаються полюсами, знаходять, прирівнявши знаменник до нуля. Положення полюсів системи визначає вид її перехідної характеристики.

Для аналізу системи розглядають положення полюсів на s-площині, яка графічно представляє комплексні числа (рис. 3.4).

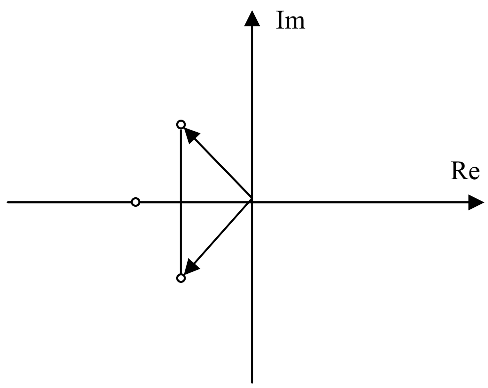

Рис. 3.4 – Графічне зображення полюсів на s-площині

Корені рівняння можуть бути дійсними, що лежать на дійсній осі Re, і комплексно-спряженими, розташованими симетрично відносно дійсної осі.

Полюси, розташовані в лівій половині s-площини, дають затухаючу реакцію на вхідну дію, а полюси на уявній осі або в правій половині s-площини, дають, відповідно, нейтральну реакцію або таку, що розходиться.

Таким чином, необхідна і достатня умова того, щоб динамічна система була стійка, полягає в тому, щоб усі полюси передавальної функції системи мали негативну дійсну частину. Якщо не усі з цих полюсів знаходяться в лівій напівплощині, то ми вважатимемо систему нестійкою. Якщо характеристичне рівняння системи має корені, розташовані на уявній осі Im, а усі інші корені знаходиться в лівій половині s-площини, то систему прийнято називати такою, що знаходиться на межі стійкості, оскільки тільки окремі вхідні сигнали (гармонійні сигнали, частота яких співпадає з полюсами системи) обумовлюють необмежене наростання реакції системи. У нестійкої системи принаймні один корінь характеристичного рівняння знаходиться в правій половині s-площини. В цьому випадку вихідна змінна необмежено наростатиме при будь-якому вхідному сигналі.

У MATLAB ми можемо перевірити стійкість, безпосередньо вичисливши корені характеристичного рівняння.

Приклад. Дано характеристичне рівняння:

$$p\,(s) = s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10 = 0.$$

Рішення у MATLAB:

```
>>p=[1 2 2 4 11 10];
>>r=roots(p)
```

Результат:

```
r =
0.8950 + 1.4561i
0.8950 - 1.4561i
-1.2407 + 1.0375i
-1.2407 - 1.0375i
-1.3087
```

Система нестійка, оскільки маємо комплексно-спряжені корені з позитивною дійсною частиною.

Функція `p=pole(sys)` обчислює полюси `p` одновимірної або багатовимірної LTI-моделі `sys`.

Для дискретних систем характеристичне рівняння замкнутої системи

$$1 - W^*_{\text{р.с}}(s) = 0$$

є трансцендентним, проте рівняння

$$1 - W^*_{p.c.}(z) = 0 \qquad (3.1)$$

є алгебраїчним відносно змінної z. Щоправда, перехід від змінної s до змінної z істотно міняє область розташування коренів характеристичного рівняння, які відповідають стійкості системи, в порівнянні з тією ж областю розташування коренів рівняння неперервної системи. Для стійкості системи з характеристичним рівнянням (3.1) необхідно і достатньо, щоб усі корені цього рівняння за модулем були менше одиниці, тобто розміщувались на комплексній площині Z усередині кола одиничного радіусу з центром на початку координат (рис. 3.5).

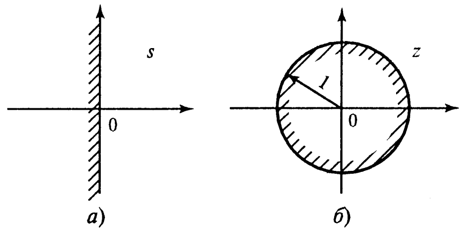

Рис. 3.5

3.2.2 Метод кореневого годографа

Метод кореневого годографа є графічним, а сам годограф дозволяє отримати якісну інформацію про стійкість і динамічні показники системи по передавальній функції розімкненої частини. Якщо положення коренів характеристичного рівняння чим-небудь не влаштовує проектувальника, то по кореневому годографу він легко може визначити, як необхідно змінити варійований параметр.

Для простої одноконтурної системи, показаної на рис. 3.6

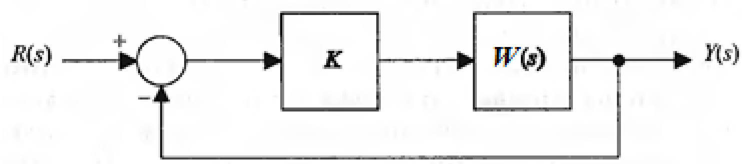

Рис. 3.6

характеристичне рівняння має вигляд:

$$1 + KW(s)=0$$

де K – варійований параметр.

Корені характеристичного рівняння системи в загальному випадку є комплексними, тому попередню формулу можна записати у вигляді:

$$\left|K \cdot W(s)\right| e^{j\arg K \cdot W(s)} = -1 + j0.$$

Розділивши дійсну і уявну частини, отримаємо два рівняння

$$\left|K \cdot W(s)\right| = -1\,; \tag{3.2}$$

$$\arg[KW(s)] = \pi \pm 2k\pi, \tag{3.3}$$

де k =0,±1,±2,...

Кореневий годограф – це траєкторії коренів характеристичного рівняння системи на s-площині при зміні параметра системи К.

До складу Control System Toolbox включені групи команд і функцій, призначені для підтримки методу кореневого годографа.

Група команд і функцій `rlocus` призначена для розрахунку і побудови кореневого годографа для простої одноконтурної системи. При зверненні до команд і функцій цієї групи вимагається один вхідний аргумент – ім'я LTI-моделі одновимірної розімкненої системи, заданої в будь-якому з підкласів `ss, tf` або `zpk`.

Командою `rlocus(sys)` автоматично формується такий набір позитивних значень коефіцієнта передачі *К*, щоб побудувати гладкий графік кореневого годографа.

Команда `rlocus(sys, k)` дозволяє користувачеві задати вектор `k` значень коефіцієнта передачі для побудови кореневого годографа.

Функції `[r, k] - rlocus(sys), r = rlocus(sys, k)` повертають масив `r` полюсів замкнутого контура і вектор `k` відповідних коефіцієнтів передачі у вигляді вихідного або вхідного аргументів. Масив `r` має `length(k)` стовпців і його *j*-й стовпець містить усі полюси замкнутої системи, відповідні значенню `k(j)`.

Інша група функцій `rlocfind` призначена для вказівки необхідного розташування полюсів на кореневому годографі і визначення відповідного коефіцієнта передачі.

Команди `sgrid` і `zgrid` дозволяють нанести на кореневий годограф сітки координат, що спрощує вибір бажаного розташування полюсів.

Особливо слід зупинитися на спеціальному засобі *Root Locus Design GUI*, заснованому на графічному інтерфейсі користувача при побудові кореневих годографів. Виклик цієї підсистеми виконується командою `rltool`.

Окрім побудови кореневого годографа цей засіб дозволяє настроювати параметри коригуючого пристрою, контролювати інші динамічні характеристики замкнутої системи (перехідну функцію, логарифмічні частотні характеристики, годографи Найквіста і Никольса) шляхом виклику підсистеми перегляду LTIViewer, а також звертатися до підсистеми Simulink для моделювання динаміки замкнутого контуру.

3.3.3 Графіки частотних характеристик

Передатну функцію системи $W(s)$ можна представити в частотній області за допомогою співвідношення

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = R(\omega) + jX(\omega), \qquad (3.4)$$

где $R(\omega) = \mathrm{Re}[W(j\omega)]$ и $X(\omega) = \mathrm{Im}[W(j\omega)]$.

У показовій формі

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (3.5)$$

де

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{X(\omega)}{R(\omega)} \quad \text{и} \quad |W(j\omega)|^2 = R^2(\omega) + X^2(\omega).$$

Для графічного зображення частотних характеристик можна скористатися виразами (3.4) або (3.5). Вираження (3.5) дозволяє представити частотні характеристики в полярних координатах. Побудова частотних характеристик подібним методом є трудомісткою процедурою і не дозволяє оцінити вплив на їх вид окремих полюсів або нулів.

Рішення задачі істотно спрощується при використанні логарифмічних частотних характеристик, часто званих діаграмами Боде. Посилення системи зазвичай характеризується десятковим логарифмом модуля $W(j\omega)$ і вимірюється в децибелах (дБ):

Коефіцієнт підсилення = $20\lg |W(j\omega)|$.

Амплітудно-частотну характеристику, виражену в децибелах, і фазову частотну характеристику $\varphi(\omega)$ зазвичай зображують на окремих графіках, як показано на рис. 3.7.

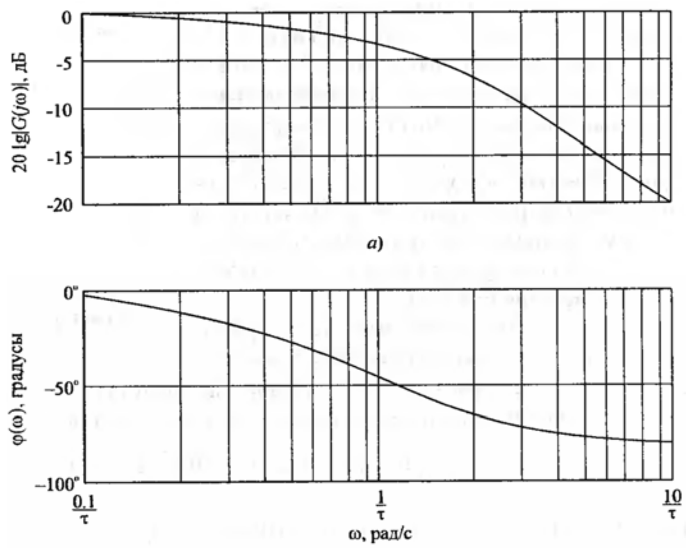

Рис. 3.7

Лінійний масштаб для частоти є не надто зручним, тому прийнято використовувати логарифмічний масштаб. Тоді, якщо по осі абсцис відкладати lgω, то асимптотою амплітудної характеристики буде пряма лінія, як показано на рис. 3.8.

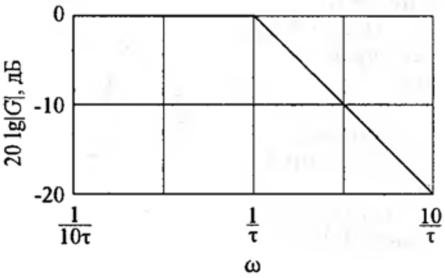

Рис. 3.8

Нахил цієї прямої грає важливу роль. Відстань між двома частотами, що відрізняються в 10 разів, називається декадою. Іноді використовують інший інтервал частот – октаву, при якому частоти відрізняються в 2 рази. Зміна амплітудної характеристики при зміні частоти на декаду або октаву є основним параметром частотних характеристик.

Основна перевага логарифмічних частотних характеристик полягає в тому, що співмножники виду ($j\omega\tau$+l), що входять в передавальну функцію, при побудові враховуються у вигляді суми членів 201g|$j\omega\tau$+l|, і діаграма Боде легко отримується шляхом складання характеристик, відповідних кожному окремому співмножнику. Аналогічним чином, фазова частотна характеристика отримується складанням відповідних характеристик окремих співмножників. Для кожного з цих співмножників можна знайти вид амплітудної і фазової частотних характеристик і потім використовувати їх для побудови діаграми Боде. Ці характеристики, взагалі кажучи, є криволінійними, проте процедуру можна спростити, якщо скористатися їх апроксимацією асимптотами у вигляді прямих ліній..

У MATLAB є функції `bode` і `logspace`. Функція `bode` використовується для побудови діаграми Боде, а функція `logspace` задає необхідний для цього логарифмічний масштаб частоти.

Команда `bode(sys)` будує на екрані графіки логарифмічних частотих характеристик для LTI-моделі `sys`. Ця модель може бути неперервною або дискретною, одновимірною або багатовимірною. У разі багатовимірної моделі функція `bode` будує множину логарифмічних частотних характеристик для кожного каналу системи від входу до виходу. Діапазон частот визначається автоматично по значеннях нулів і полюсів передавальної функції системи.

Команда bode(sys,w) будує логарифмічні частотні характеристики в заданому діапазоні частот w. Цей діапазон має бути заданий множиною значень частоти w = {wmin, wmax}. Для побудови логарифмічних частотних характеристик на заданих частотах створюється вектор значень частот w. Для створення логарифмічної сітки слід застосувати команду logspace.

Функція x = logspace(d1, d2) формує вектор-рядок, що містить 50 рівновіддалених у логарифмічному масштабі точок, які покривають діапазон від 10^{d1} до 10^{d2}.

Функція x = logspace(d1, d2, n) формує вектор-рядок, що містить n рівновіддалених у логарифмічному масштабі точок, які покривають діапазон від 10^{d1} до 10^{d2}.

Одиниця виміру частоти – рад/с.

Функції [mag, phase, w] = bode (sys), [mag, phase] = bode(sys, w) виконують розрахунок амплітудних mag і фазових phase частотних характеристик. Одиницю виміру амплітудної характеристики можна перетворити в децибели (дБ) таким чином: magdb = 20*lg(mag); одиниця виміру фази – градус, одиниця виміру частоти – рад/с.

3.3.4 Аналіз стійкості методом частотних характеристик

Частотні характеристики системи містять досить інформації для визначення її стійкості. Ці характеристики можуть бути отримані експериментально шляхом подання на вхід системи синусоїдальної дії і варіювання його частоти; це дозволяє досліджувати відносну стійкість системи навіть тоді, коли значення її параметрів невідомі.

Частотний критерій стійкості був запропонований в 1932 р. Найквістом, і досі він залишається фундаментальним методом аналізу стійкості лінійних систем управління.

Критерій Найквіста – частотний критерій, що дозволяє по виду амплітудно-фазової частотної характеристики розімкненої системи оцінити стійкість замкнутої системи. Якщо розімкнена система стійка, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкненої системи при зміні частоти від 0 до ∞ не охоплювала точку з координатами (–1, j0). Якщо АФЧХ розімкненої системи проходить через цю точку, то система буде на межі стійкості. Критерій Найквіста дозволяє наочно простежити вплив зміни параметрів передатної функції на стійкість системи.

Якщо розімкнена система нестійка, то для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб АФЧХ розімкненої системи охоплювала точку з координатами (–1, j0) і при зміні частоти від нуля до нескінченності оберталася навколо неї проти годинникової стрілки *m* разів, де *m* – число правих полюсів розімкненої системи.

Для побудови АФЧХ необхідно задатися рядом значень частоти в діапазоні від нуля до безкінечності, визначити для кожної частоти значення дійсної і уявної частотних характеристик і показавши їх на площині, отримати ряд точок, що утворюють годограф Найквіста. Виконати це вручну набагато важче, ніж побудувати діаграму Боде. За допомогою MATLAB рішення цієї задачі значно полегшується.

Команда `nyquist(sys)` будує на екрані графік годографа Найквіста для LTI–моделі з дескриптором `sys`. Ця модель може бути неперервною або дискретною, одновимірною або багатовимірною. У разі багатовимірної моделі будується ряд годографів для кожного каналу входу-виходу.

Діапазон частот визначається автоматично по значеннях нулів і полюсів передатної функції системи.

Команда `nyquist(sys, w)` будує годограф Найквіста в заданому діапазоні частот. Цей діапазон має бути заданий вектором значень частот `w`. Для створення логарифмічно розподіленого вектору частот використовується команда logspace. Одиниця виміру частоти – рад/с.

Функції `[re,im,w]=nyquist(sys)`,`[re,m]=nyquist(sys,w)` виконують розрахунок годографів Найквіста. Який може бути побудований потім за допомогою функції `plot`.

Для критерію Найквіста важлива точка (–1, j0) на комплексній площині або значення 0 дБ і –180°, що відповідають їй на діаграмі Боде. Ясно, що близькість годографа Wp(jω) до цієї точки може служити мірою відносної стійкості системи. Міра відносної стійкості називається запасом по модулю і визначається як величина, зворотна модулю $W_p(j\omega)$ на частоті, при якій фазовий зсув є рівним –180° (тобто Re = 0). Запас по модулю показує, в скільки разів можна було б збільшити коефіцієнт посилення системи, щоб годограф пройшов через точку (–1, j0).

Таким ччином, запас по модулю – величина, що визначається при фазовому зсуві –180° і така, що показує, в скільки разів може бути збільшений коефіцієнт посилення системи, перш ніж вона виявиться на межі стійкості, коли діаграма Найквіста пройде через точку (–1, j0).

Аналогічно запас по фазі – величина, визначувана на частоті, при якій |Wp(jω)| = 1 і яка показує, який додатковий негативний фазовий зсув допустимий в системі, перш ніж вона виявиться на межі стійкості, коли діаграма Найквіста пройде через точку (–1, j0).

Оскільки частотні характеристики зручніше зображувати не в полярних координатах, а у вигляді діаграми Боде, то запаси стійкості по модулю і по фазі звичайно визначаються по цій діаграмі. При аналізі стійкості за допомогою діаграми Найквіста критичною точкою є точка з координатами Re = –1, Im = 0. На діаграмі Боде їй відповідають значення 0 дБ для модуля $|W_p(j\omega)|$ і 180° (чи - 180°) для фазового зсуву.