2.8 Модель системи у змінних стану

Розглянемо динамічну систему (рис. 2.4).

Рис. 2.4

Стан системи описується набором змінних стану [$x_1(t)$, $x2(t)$,.., $x_n(t)$]. Це такі змінні, які визначають майбутню поведінку системи, якщо відомий її поточний стан і усі зовнішні дії.

Стан системи в загальному випадку описується диференціальними рівняннями першого порядку відносно кожної із змінних стану:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \ldots + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \ldots + b_{2m}u_m, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \ldots + b_{nm}u_m, \end{aligned} \tag{2.26}$$

де $\dot{x} = dx/dt$. Цю ж систему диференціальних рівнянь можна записати в матричній формі:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots b_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

Чи в компактному виді:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{2.28}$$

Це рівняння часто називають просто рівнянням стану.

Матриця-стовпець, що складається із змінних стану, називається вектором стану і має вигляд:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (2.29)$$

Вектор вхідних сигналів позначається як **u**.

Матриця **A** є квадратною розмірності $n \times n$, а матриця **B** має розмірність $n \times m$. Рівняння стану зв'язує швидкість зміни стану системи з самим станом і вхідними сигналами.

Аналогічно можна записати зв'язок вихідних сигналів лінійної системи з змінними стану і вхідними сигналами за допомогою рівняння виходу

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}, \qquad (2.30)$$

Прикладом системи, яку можна описати змінними стану, є RLC-коло, зображене на рис.2.4.

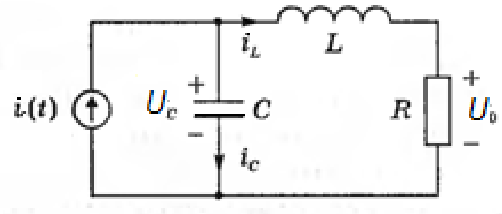

Рис. 2.4

Для опису пасивного RLC-кола число необхідних змінних стану дорівнює числу незалежних елементів, що накопичують енергію. Стан системи характеризується двома змінними (x_1, x_2) де $x_1 = U_c(t)$ це напруга на конденсаторі, а $x_2 = I_L(t)$ — струм через індуктивність.

Загальна енергія, запасена в колі:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} L I_L^2 + \frac{1}{2} C U_C^2 . \qquad (2.31)$$

Використовуючи закон Кірхгофа для струмів, запишемо диференціальне рівняння першого порядку, яке визначає швидкість зміни напруги на конденсаторі:

$$I_C = C \frac{dU_C}{dt} = I(t) - I_L ,$$

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{1}{C} I(t) - \frac{1}{C} I_L . \qquad (2.32)$$

Для напруги, стосовно правого контуру, напишемо рівняння, що визначає швидкість зміни струму через індуктивність:

$$U_L = L\frac{dI_L}{dt} = U_C - RI_L,$$

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{1}{L}U_C - \frac{R}{L}I_L. \qquad (2.33)$$

Вихід системи визначається лінійним алгебраїчним рівнянням:

$$U_0 = RI_L(t) \qquad (2.34)$$

Рівняння (2.32) і (2.33) ми можемо переписати у вигляді системи двох диференціальних рівнянь відносно змінних стану $x_1=U_c(t)$ и $x_2=I_L(t)$:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}i(t), \qquad (2.35)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2. \qquad (2.36)$$

Тоді вихідний сигнал буде рівний, згідно (2.34)

$$y_1(\mathrm{t}) = U_0(\mathrm{t}) = Rx_2 = 0x_1 + Rx_2. \qquad (2.37)$$

Представимо вираження (2.35,2.36) у вигляді рівняння стану для RLC-кола, враховуючи, що вхідний сигнал *u(t)=I(t)*:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \qquad (2.38)$$

З (2.37) отримаємо рівняння виходу:

$$y = [0 \quad \mathrm{R}]\,\mathbf{x}. \qquad (2.39)$$

У загальному випадку аналіз системи управління в часовій області припускає завдання її матричної моделі в просторі станів:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{AX} + \mathbf{BU}; \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{CX} + \mathbf{DU}. \end{aligned} \qquad (2.40)$$

Вектор ***X*** характеризує стан системи, матриця **A** є матриця коефіцієнтів розмірності $n\times n$, **B** — матриця входу розмірності $n\times m$, **C** — матриця виходу розмірності $l\times n$, **D** — матриця обходу розмірності $l\times m$. Тут n – кількість змінних стану, m – кількість входів, l – кількість виходів.

Для більшої наглядності таку модель представляють структурною схемою, показаною на рис. 2.5.

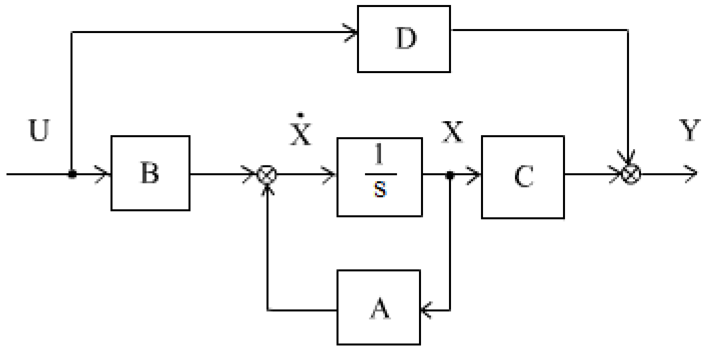

Рис. 2.5

Якщо обмежуватись розглядом систем з одним входом і одним виходом, тому в даному випадку $m=l=1$, а y і u є скалярними змінними.

Основними елементами моделі в просторі станів є вектор **X** і чотири матриці (**A**, **B**, **C**, **D**). Подібний опис як найкраще підходить для використання середовища MATLAB, в якою основною робочою одиницею є матриця. Синтаксис команди, що створює безперервну LTI -систему у вигляді ss-объекта с одним входом і одним виходом

```
sys=ss(A, B, C, D).
```

Оскільки існують три підкласи LTI-об'єктів, необхідно мати функції для взаємного перетворення моделей. Перетворення виконується функціями `tf, ss` і `zpk`., аргументом яких є дескриптор раніше створеної LTI-моделі `sys`.

Для прикладу розглянемо систему третього порядку:

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{2s^2+8s+6}{s^3+8s^2+16s+6}. \quad (2.41)$$

Створимо ПФ:

```
num=[2 8 6]; den=[1 8 16 6];
sys_tf=tf(num,den);
```

З допомогою функції ss здійснимий перехід від передатної функції (2.41) до опису системи рівняннями (2.40):

```
sys_ss=ss(sys_tf)
```

Результат отримуємо у вигляді чотирьох матриць:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-8 & -2 & -0{,}75\\ 8 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[1\ \ 0{,}5\ \ 0{,}375],\quad \mathbf{D}=[0].$$

2.9 Властивості LTI -объєктів

При виконанні операцій підсумовування систем або охоплення системи зворотним зв'язком бере участь декілька LTI-объектів. Якщо ці об'єкти належать різним підкласам, то виникає питання, якому підкласу належатиме результуючий об'єкт. Ця проблема вирішується введенням ієрархії об'єктів і відповідних правил пріоритету. Об'єкти zpk підкласу мають пріоритет перед об'єктами tf -підкласу, а об'єкти ss -підкласу мають пріоритет перед об'єктами tf і zpk-підкласів. Іншими словами, операції з LTI-об'єктами матимуть результатом:

• об'єкт підкласу ss, якщо принаймні один операнд належить підкласу ss;

• об'єкт підкласу zpk, якщо відсутні операнди підкласу ss і принаймні один з операндів належить підкласу zpk;

• об'єкт підкласу tf, якщо усі операнди відносяться до підкласу tf.

Усі операнди нижчого пріоритету перед виконанням операції перетворяться в підклас операнда вищого пріоритету.

Для того, щоб сформувати дискретну модель із заданим періодом дискретності, просто треба до вхідних аргументів функцій `tf, zpk і ss` додати період дискретності `Ts`, вимірюваний в секундах

Для неперервної системи період дискретності `Ts` дорівнює нулю. Значення `Ts = -1` відповідає випадку, коли період дискретності для дискретної системи не специфікований.

LTI-об'єкти являють собою структури, які містять різну інформацію, наприклад, імена входів або примітки про історію моделі. Для того, щоб отримати інформацію про властивості LTI-об'єктів, використовують команду `ltiprops`. Властивості – це різні поля структури об'єктів, які мають імена і містять значення. Розрізняють родові властивості, які є загальними для усіх трьох підкласів об'єктів, і специфічні властивості, які відносяться тільки до одного підкласу моделі. Властивості, які є загальними для усіх трьох підкласів, перераховані в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Родові властивості LTI-об'єктів

Властивості	Опис	Тип даних
`InpulName`	Назви входів	Масив комірок
`Notes`	Інформація про історію моделі	Текст
`OulpulName`	Назви виходів	Масив комірок
`Ts`	Період дискретності	Скаляр
`Td`	Запізнення на вході	Вектор
`Userdata`	Додаткові дані	Довільні

Властивості `InpulName` і `OulpulName` призначені для того, щоб описати призначення входів і виходів системи; для їх представлення використовуються масиви комірок, що містять рядки символів.

Властивість запізнювання на вході `Td` доступно тільки для неперервних систем, його представлення – вектор запізнювань для кожного вхідного каналу, виміряних в секундах; за умовчанням використовується нульове значення (відсутність запізнювання).

Властивість `Userdata` може містити числові дані про моделі, що описуються довільними типами даних. За умовчанням це поле є порожнім.

Властивість `Variable` для об'єктів підкласів `tf` і `zpk` задає спосіб відображення змінної при виведенні передавальних функцій на екран. За умовчанням такими змінними є «s» (змінна перетворення Лапласа) для неперервних систем і «z» (змінна Z-перетворення) для дискретних систем. Альтернативними значеннями змінної можуть бути «p» для змінної Лапласа і «q» або «z^–1» для змінної Z-перетворення.

Специфічні властивості ss-об‘єктів:

`A` – матриця стану;

`B` – матриця входу;

`C` – матриця виходу;

`D` – матриця обходу;

`E` – матриця коефіцієнтів при похідних від вектору перемінних стану при запису диференціальних рівнянь у неявній формі Коші розміром n×n;

`StateName` – імена змінних стану у вигляді вектору комірок рядків символів.