2.4 Диференціальні рівняння фізичних систем

Диференціальні рівняння, що описують динаміку фізичної системи, виводять на підставі фундаментальних фізичних законів. Цей метод в рівній мірі застосований до механічних, електричних, гідравлічних і термодинамічних систем.

Найбільш універсальна модель, що має форму

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j u^{(j)}(t), \tag{2.8}$$

де a_i и b_j – постійні коефіцієнти, що звуться параметрами моделі, $u^{(j)}(t)$ і $y^{(i)}(t)$ – похідні, відповідно, вхідного і вихідного сигналів, n – порядок моделі, при цьому $n \geq m$ – умова можливості фізичної реалізації елемента.

Переважну більшість фізичних систем можна вважати лінійними в деякому діапазоні зміни змінних. Проте при необмеженому зростанні цих змінних усі системи кінець кінцем стають нелінійними.

Необхідною умовою лінійності системи є відповідний зв'язок між збуренням $x(t)$ і реакцією $y(t)$. Якщо до системи, що знаходиться в стані спокою, прикласти збурення $x_1(t)$, те на виході з'явиться реакція $y_1(t)$. Якщо за тих же умов піддати систему збуренню $x_2(t)$, те вона дасть відповідну реакцію $y_2(t)$. Необхідною умовою лінійності є те, щоб при збуренні $x_1(t) + x_2(t)$ система давала реакцію $y_1(t) + y_2(t)$. Цю умову зазвичай називають принципом суперпозиції. Крім того необхідно, щоб при множенні вхідної змінної на константу K реакція (вихідна змінна) системи змінилася в таке ж число разів, тобто виявилася рівною Ky. Ця властивість носить назву гомогенності.

Лінійною системою є така, що задовольняє властивостям суперпозиції і гомогенності.

Багато механічних і електричних елементів в досить широкому діапазоні зміни змінних можна вважати лінійними. Цього не можна сказати про теплові і гідравлічні елементи, які найчастіше за принципом своєї дії виявляються нелінійними. Проте нелінійні елементи часто вдається лінеаризувати за умови малих відхилень сигналів від їх стаціонарних значень. Для цього використовують розкладання функції в околиці робочої точки в ряд Тейлора, нехтуючи членами вищого порядку малості.

Процеси в лінійних імпульсних або цифрових системах описуються дискретно-різницевими рівняннями. Якщо в (2.8) замість безперервного часу перейти до розгляду функцій $u(t)$ і $y(t)$, визначених тільки в рівновіддалених точках $t_k = k\Delta t$, де k – будь-яке ціле число, а Δt – період або крок дискретизації, то в розгляд вводиться дискретна математична модель у формі лінійного неоднорідного різницевого рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$a_n y[k] + a_{n-1} y[k-1] +...+ a_0 y[k-n] = b_m u[k] + b_{m-1} u[k-l] +...+ b_o u[k-m], \quad (2.9)$$

де $y[k-i] = y((k-i)\Delta t)$, $i = 1, \ldots, n$;

$u[k-j] = u((k-j)\Delta t)$, j = 1, …, m.

Рівняння (2.9) є рекурентним співвідношенням, яке дозволяє вичислити будь-який (i +1)-й член послідовності по значеннях попередніх її членів i , i–1,... та значенню $u(i+1)$.

2.5 Перетворення Лапласа

Можливість лінеаризації фізичних систем надає в розпорядження дослідника апарат перетворення Лапласа. Метод перетворення Лапласа дозволяє замінити досить складне рішення диференціальних рівнянь відносно простим рішенням алгебраїчних рівнянь. Визначення реакції системи на вхід передбачає наступні дії:

а) отримання диференціальних рівнянь;

б) перетворення за Лапласом цих диференціальних рівнянь;

в) рішення отриманих рівнянь алгебри відносно змінної, яка нас цікавить.

Для того, щоб функція $f(t)$ мала перетворення Лапласа, досить, щоб виконувалася умова

$$\int_{0^-}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty, \quad (2.10)$$

тобто для деякого дійсного позитивного σ_1 цей інтеграл повинен сходитися. Усі сигнали, що фізично реалізуються, мають перетворення Лапласа.

Перетворення Лапласа виконується по формулах:

а) пряме перетворення

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = L\{f(t)\}; \quad (2.11)$$

б) зворотне перетворення

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{+st} ds = L^{-1}\{F(s)\}. \quad (2.12)$$

Змінну s в перетворенні Лапласа можна розглядати як оператор диференціювання, тобто $s \equiv \dfrac{d}{dt}$.

Аналогічно можна ввести оператор інтегрування $\dfrac{1}{s} \equiv \int_0^t dt$.

Щоб проілюструвати перетворення Лапласа, розглянемо механічну коливальну систему, що описується рівнянням

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+ky=r(t).$$

Нам необхідно отримати рішення цього рівняння, тобто вираження $y(t)$. Перетворення Лапласа для рівняння має вигляд:

$$Ms^2Y(s)-Msy_0+bsY(s)-by_0+kY(s)=0.$$

де y_0 є початковим значенням функції $y(t)$.

Звідси отримаємо:

$$Y(s)=\frac{(Ms+b)y_0}{Ms^2+bs+k}=\frac{p(s)}{q(s)}.$$

Далі треба виконати зворотне перетворення Лапласа $L^{-1}\{Y(s)\}$.

2.6 Передатна функції лінійних систем

Передатна функція (ПФ) лінійної системи визначається як відношення перетворення Лапласа вихідної змінної $Y(s)$ до перетворення Лапласа вхідної змінної $U(s)$ при тому, що усі початкові умови дорівнюють нулю. Для універсальної моделі (2.8) маємо:

$$W(s)=\frac{b_m s^m+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0} \qquad (2.13)$$

Передатна функція системи (чи елементу системи) однозначно описує динамічний зв'язок між цими змінними.

Для дискретизованих у часі математичних моделей розроблений дискретний аналог перетворення Лапласа – апарат Z-перетворення, який дозволяє ввести в розгляд дискретну передатну функцію:

$$W(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}}. \qquad (2.14)$$

Тут z – змінна Z-перетворення, аналог оператора Лапласа s. Вираз z^{-i} трактується як оператор зсуву на i періодів дискретизації, тобто операції $z^{-i}f(k\Delta t)$ відповідає взяття відліку $f((k\text{-}i)\Delta t)$.

ПФ існує тільки для лінійних стаціонарних (з постійними параметрами) систем. У нестаціонарних системах один або декілька параметрів залежать від часу, тому перетворенням Лапласа скористатися не можна. ПФ описує поведінку системи в термінах вхід-вихід і не несе ніякої інформації про внутрішні змінні і характер їх зміни.

Поняття передатної функції і засновані на ньому методи є дуже важливими, оскільки вони надають в розпорядження дослідника і проектувальника такий цінний засіб, як математична модель елементів систем управління. Слід визнати, що ПФ надає неоціниму допомогу в спробах отримання моделей динамічних систем. Особлива цінність передатної функції полягає в тому, що положення її нулів і полюсів на *s*-площині дають повне уявлення про перехідну характеристику системи.

При дослідженні стійкості динамічних систем і проектуванні регуляторів набули широкого поширення частотні характеристики.

Нехай на вхід системи з передатною функцією $W(s)$ подається гармонійний сигнал

$$u(t) = a_u \cos(\omega t),\ \mathrm{t} > 0. \tag{2.15}$$

У цих умовах справедлива наступна теорема: Якщо динамічна система є стійкою, то стала реакція $y(t)$ на гармонійну дію є функцією тієї ж частоти з амплітудою

$$a_y = a_u\,|W(j\omega)|, \tag{2.16}$$

і відносним зсувом за фазою

$$\varphi = \arg W(j\omega). \tag{2.17}$$

Таким чином:

$$y(t) = a_u\,|W(j\omega)|\,\cos(\omega t + \arg W(j\omega)), \tag{2.18}$$

де $W(j\omega) = W(s)\big|_{s=j\omega}$ – частотна характеристика.

Частотна характеристикою $W(j\omega)$ стаціонарної динамічної системи може бути отримана виконанням перетворення Фур'є до перехідної функції $h(t, \tau)$:

$$W(j\omega) = F[\mathrm{h}(\mathrm{t},\tau)] = \int_0^\infty \mathrm{w}(\mathrm{t} - \tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(\mathrm{t}-\tau)}d\tau, \tag{2.19}$$

де $w(t - \tau)$ – імпульсна перехідна функція.

Частотна характеристика є комплексною функцією, і, отже, може бути представлена у показовій і алгебраїчній формах:

$$W(j\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega+\varphi(\omega)} = U(\omega) = jV(\omega). \tag{2.20}$$

Тут

$A(\omega) = |W(j\omega)|$ – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ);

$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ – фазо-частотна характеристика (ФЧХ);

$U(\omega) = \mathrm{Re}\,W(j\omega)$ – дійсна частотна характеристика (ДЧХ);

$V(\omega) = \mathrm{Im}\,W(j\omega)$ – уявна частотна характеристика (УЧХ).

Геометричне місце точок $W(o\omega)$ на комплексній площині при зміні ω від ω_0 до ω_1 (зазвичай $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \infty$), називається амплітудно-фазовою характеристикою (АФХ) або частотним годографом Найквіста.

Має широке практичне значення діаграма Боде (логарифмічна амплітудна характеристика, ЛАХ), яка визначається як $L = 20\lg A(\omega)$, вимірюється в децибелах і будується як функція від $\lg\omega$.

Для комп'ютерного моделювання використовуватимемо пакет прикладних програм (ППП) Control System Toolbox системи інженерних розрахунків MatLab.

У Control System Toolbox введений новий клас об'єктів – LTI-моделі (Linear Time Invariant Models). Введення LTI-об'єктів базується на об'єктно-орієнтованому підході до програмування. Об'єкти цього класу задаються у вигляді структури, поля якої містять інформацію про модель даних, період дискретності, імена вхідних і вихідних змінних. Операції, що виконуються над об'єктами цього класу, називаються методами. Вони можуть включати як прості операції типу складання або множення, так і складніші, наприклад, складання передатної функції і числа.

Одновимірна ПФ `W(s) = num(s)/den(s)` задається багаточленом чисельника `num` і багаточленом знаменника `den`. У системі MATLAB багаточлени представляються як вектори-рядки, складені з коефіцієнтів багаточлена в порядку убування степеня s. Наприклад, вектор [1, 3, 5] відповідає багаточлену $s^2 + 3s + 5$. Якщо задані вектори `num` і `den`, які є відповідними багаточленам чисельника і знаменника, то функція `sys = tf(num, den)` створює LTI-модель одновимірної системи у вигляді передатної функции W(s) = n(s)/d(s). Змінна `sys` називається дескриптором lti-моделі. Вона є об'єктом підкласу `tf`, що містить дані про чисельник і знаменник передатної функції.

Таким чином, синтаксис команди, яка створює LTI-систему с одним входом і одним виходом у вигляді передатної функції:

`sys = tf([`b_m`, …, `b_1`, `b_0`], [`a_n`, …, `a_1`, `a_0`]),`

де $b_m, \ldots, b_1$ – значення коефіцієнтів полінома B у (2.13),

$a_n, \ldots, a_1$ – значення коефіцієнтів полінома A у (2.13).

Змінна `sys` називається дескриптором LTI-об'єкта, використовуючи його, можна посилатись на цей об'єкт.

Функція sys = tf(num, den, Ts) створює дискретну LTI-систему з періодом дискретності Ts.

Щоб вирішити зворотне завдання – витягти інформацію про використовувану модель з опису існуючого LTI-об'єкта, використовується команда:

```
[num, den, Ts] = tfdata(sys)
```

Функція `tfdata` повертає вектори коефіцієнтів чисельника (`num`) і знаменника (`den`) ПФ, а також період дискретності `Ts`.

Іншим варіантом отримання динамічних характеристик САУ є використання графічного інтерфейсу LTI Viewer, виклик якого здійснюється командою `ltiviewer`, у якій як параметр можна вказати ім'я змінної w, що містить LTI-объект. Використовуючи команду `ltiviewer(w)`, можна отримати динамічні і частотні характеристики САУ у вигляді графіків.

2.7 Zero-pole-gain-моделі

Розглянемо ПФ, задану у вигляді відношення поліномів:

$$W(s) = \frac{p(s)}{q(s)}. \tag{2.24}$$

Якщо поліном $q(s)$, що стоїть в знаменнику, прирівняти нулю, то ми отримаємо характеристичне рівняння, назване так тому, що його корені визначають характер руху системи. Ці корені називаються полюсами системи. Корені полінома $p(s)$, що стоїть в чисельнику, називаються нулями системи. У полюсах функція $W(s)$ обертається в нескінченність, а в нулях вона стає рівною нулю. Розташування полюсів і нулів на комплексній площині визначає характер власного (вільного) руху системи.

Для визначення коренів поліномів степеня k може застосовуватися команда MatLab `roots(P)`, яка як аргумент `P` використовує матрицю коефіцієнтів полінома $[p_k, \ldots, p_0]$.

Передатну функцію можна виразити через нулі і полюси, використовуючи формулу розкладання члена на лінійні множники:

$$W_p(s) = \frac{K \prod_{j=1}^{m} (s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^{n} (s - s_i^*)}, \tag{2.25}$$

де s_j^0 – нулі передатної функції;

s_i^* – полюси передавальної функції;

n и m – порядки знаменника і чисельника;

K - коефіцієнт посилення.

Таким чином, модель системи може бути задана нулями, полюсами і коефіцієнтом посилення. Така модель називається Zero-pole-gain-моделью, скорочено записується як zpk-модель.

Відповідно в Control System Toolbox введений тип даних, таких, що визначають динамічну систему у вигляді набору полюсів, нулів і коефіцієнта посилення передавальної функції. Синтаксис команди, що створює LTI-систему у вигляді об'єкта ZPK sys=zpk([$[s_1^0, ..., s_m^0]$,$[s_1^*, ..., s_n^*]$, *K*)

Тут $[s_1^0, ..., s_m^0]$ – вектор нулів системи, $[s_1^*, ..., s_n^*]$ – вектор полюсів системи, K – коефіцієнт посилення.

Приклад. Нехай відомо, що ПФ має коефіцієнт посилення $K = -2$, один нуль $s_1^0 = 0$ і три полюси:

$$s_1^* = 1 - j;\ s_2^* = 1 + j;\ s_3^* = 2.$$

Уведемо в робочому вікні MATLAB текст:

```
>> sys=zpk(0, [1-j, 1+j, 2], -2)
```

Тим самим створюємо LTI-об'єкт, про що система повідомить нас, видавши на екран квитанцію:

```
sys =
          -2 s
  -------------------
  (s-2) (s^2 - 2s + 2)
 Continuous-time zero/pole/gain model.
```