2.10 Модель системи у вигляді структурної схеми

Структурні схеми складаються з блоків спрямованої дії, кожному з яких відповідає певна передатна функція. Для опису системи з декількома керованими змінними використовується структурна схема з перехресними зв'язками. Наприклад, в наступній системі є дві вхідні і дві вихідні змінні.

Рис.2.6

За допомогою передатних функцій ми можемо записати рівняння, що їх зв'язують:

$$Y_1(s) = W_{11}(s)\ R_2(s) + W_{12}R_2(s), \qquad (2.42)$$

$$Y_1(s) = W_{21}(s)\ R_2(s) + W_{22}R_2(s), \qquad (2.43)$$

де W_{ij} — передатна функція від i-го входу до j-го виходу. Структурна схема, що відображає записані вище рівняння, представлена на рис. 2.7.

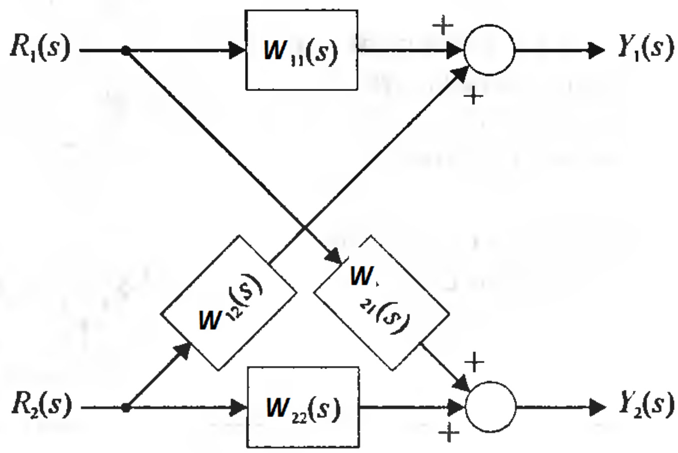


Рис. 2.7

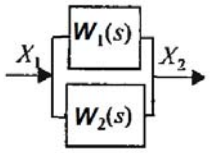
У загальному випадку, за наявності I входів і J виходів, рівняння, що зв'язують їх, можна записати в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & \dots & W_{1J}(s) \\ W_{21}(s) & \dots & W_{2J}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ W_{I1}(s) & \dots & W_{IJ}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \vdots \\ R_J(s) \end{bmatrix},$$

чи в компактному виді

$$\boldsymbol{Y=WR.}$$

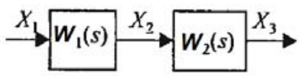
Користуючись певними правилами, структурну схему складної системи можна спростити, звівши її до конфігурації з меншим числом блоків, чим в початковій системі. При паралельному з'єднанні



передатні функції підсумовуються

$$W=W_1+W_2.$$

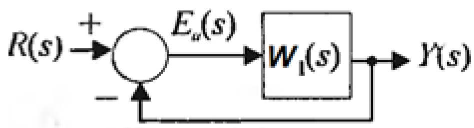
При послідовному з'єднанні



передатні функції перемножуються

$$W=W_1W_2.$$

Якщо блок охоплений негативним зворотним зв'язком



то сигнал помилки

$$E(s)=R(s)-Y(s).$$

Вихід системи

$$Y(s)=W_1(s)E(s)=W_1(s)(R(s)-Y(s));$$

$$Y(s)+W_1(s)Y(s)=W_1(s)R(s);$$

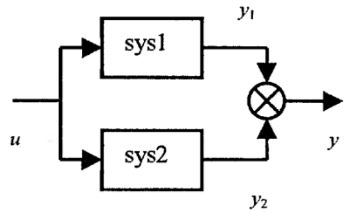
$$Y(s)=\frac{W_1(s)}{1+W_1(s)}R(s).$$

Передатна функція системи

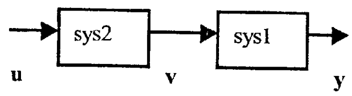
$$W=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{W_1(s)}{1+W_1(s)}.$$

В Control System Toolbox подібні структурні перетворення виконуються таким чином.

Складання LTI -объектів є адекватним паралельному з'єднанню відповідних динамічних моделей. Операція sys=sys1+sys2 повертає LTI-модель паралельного з'єднання:



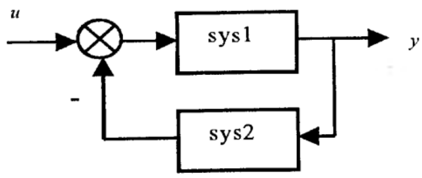
Множення LTI-об'єктів систем є адекватним послідовному з'єднанню відповідних динамічних моделей. Операція sys=sys1*sys2 повертає LTI- модель для послідовного з'єднання систем:



Зверніть увагу на зворотний порядок слідування LTI-моделей `sys1` і `sys2` в операції множення і на структурній схемі. Це пов'язано із способом зображення і позначення блоків на структурній схемі: якщо системи `sys1` і `sys2` мають передатні матриці $\mathbf{W}_1$, і $\mathbf{W}_2$, то справедливе наступне співвідношення:

$$\mathbf{y}=\mathbf{W}_1*\mathbf{v}=\mathbf{W}_1*(\mathbf{W}_2*\mathbf{u}).$$

Функція `sys=feedback(sys1,sys2)` повертає LTI-модель з дескриптором `sys`, відповідну з'єднанню LTI-моделей `sys1` і `sys2` в контур з негативним зворотним зв'язком :



У пакеті MatLab є ряд функцій, за допомогою яких можна виконувати структурні перетворення:

`series(w1,w2)` – послідовне з'єднання динамічних ланок;

`parallel(w1,w2)` – паралельне з'єднання динамічних ланок;

`feedback(w1,w2)` – включення ланки w2 в контур негативного зворотного зв'язку до w1;

`feedback(w1,w2,sign)` – включення ланки `w2` в контур зворотного зв'язку ланки `w1` з вказівкою знаку зворотного зв'язку «плюс» або «мінус» (очевидно, `feedback(w1,w2)=feedback(w1,w2, –1)`);

2.11 Моделі у вигляді сигнальних графів

Сигнальний граф є діаграмою, що складається з вузлів, сполучених між собою окремими спрямованими гілками, і є графічним засобом опису лінійних співвідношень між змінними. Сигнальні графи особливо важливі для систем управління із зворотним зв'язком, оскільки теорія цих систем в першу чергу розглядає поширення і перетворення сигналів. Основним елементом сигнального графа є однонапрямлений відрізок, званий гілкою, який відображає залежність між вхідною і вихідною змінною на кшталт того, як це робить окремий блок в структурній схемі. Точки входу і виходу гілок називаються вузлами. сигнальний граф, відповідний рівнянням (2.42), (2.43) і рис. 2.6, зображений на рис. 2.8.

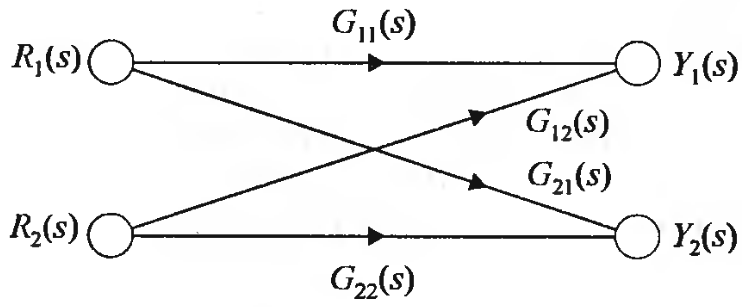


Рис. 2.8

Перетворення кожної змінної охарактеризоване написом біля спрямованої стрілки. Усі гілки, що виходять з вузла, передають сигнал іншому (вихідному) вузлу кожної гілки, причому однонапрямлено. Сума усіх сигналів, що входять у вузол, утворює відповідну цьому вузлу змінну. Шлях – це гілка або послідовність гілок, які можуть бути проведені від одного вузла до іншого. Контур – це замкнутий шлях, який починається і закінчується в одному і тому ж вузлі, причому уздовж цього шляху жоден інший вузол не зустрічається двічі. Коефіцієнт передачі контуру – це добуток усіх дуг, що входять в нього. Недотичними називають такі контури, які не мають загального вузла. Два контури, що є дотичними, мають один або більше загальних вузлів.

Сигнальний граф однозначно відповідає структурній схемі.

Нехай $X(s)$ и $Y(s)$ – вхідна і вихідна змінні системи. Тоді для обчислення ПФ системи управління по її графові можна скористуватися формулою Мейсона:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = W(s) = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \Delta_i}{\Delta}, \tag{2.44}$$

де P_i – i-й шлях від входу до виходу;

N– кількість шляхів;

Δ – визначник графа;

Δ_i– додатковий множник для шляху, а підсумовування виконується по усіх можливих шляхах від входу до виходу.

Визначник графа отримується за формулою:

$$\Delta = 1 - \sum_{k=1}^{K} L_k + \sum_{m=1,q=1}^{M,Q} L_m L_q - \sum_{r=1,s=1,l=1}^{R,S,L} L_r L_s L_l + \dots, \tag{2.45}$$

де $\sum_{k=1}^{K} L_k$ – сума коефіцієнтів передачі усіх окремих контурів; $\sum_{m=1,q=1}^{M,Q} L_m L_q$ – сума добутків усіх можливих комбінацій з двох недотичних контурів; $\sum_{r=1,s=1,l=1}^{R,S,L} L_r L_s L_l$ – сума добутків усіх можливих комбінацій з трьох недотичних контурів і т.д..

Додатковий множник для *i*-го шляху дорівнює визначникові графа, в якому прирівняні нулю коефіцієнти передачі контурів, дотичних цього шляху.

Застосування формули Мейсона ефективніше, ніж використання структурних перетворень.

Розглянемо приклад отримання ПФ багатоконтурної системи з використанням формули Мейсона для структури на рис. 2.9.

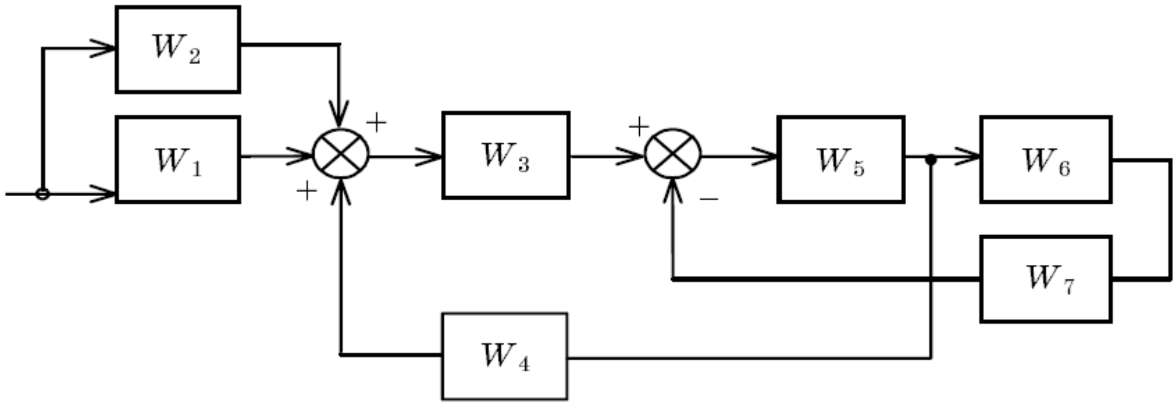


Рис. 2.9

Цій структурі відповідає граф, показаний на рис. 2.10.

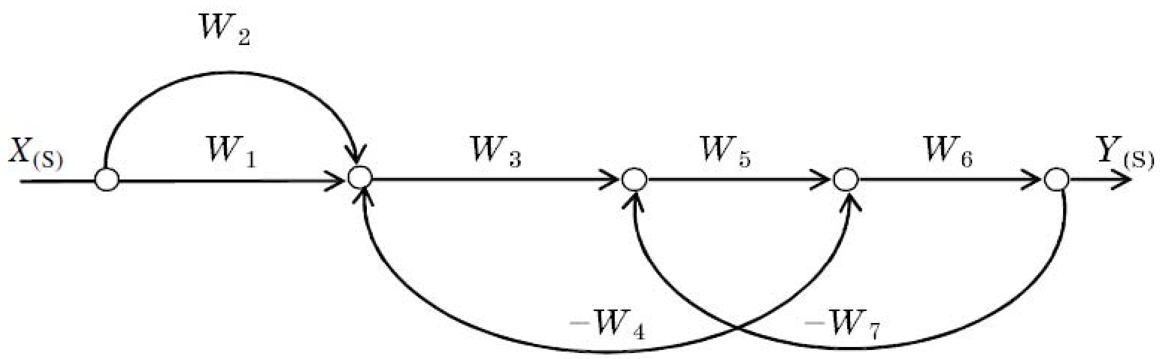


Рис.2.10

Від входу до виходу ведуть два шляхи:

$$P_1 = W_1 W_3 W_5 W_6,$$

$P_2 = W_2 W_3 W_5 W_6$.

У графі є два контури:

$$L_1 = -W_3 W_5 W_4$$
$$L_2 = -W_5 W_6 W_7.$$

Контур L_1 дотичний контуру L_2 і немає недотичних контурів, тому визначник графа обчислюється за формулою:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2).$$

Контури в даному прикладі дотичні до усіх шляхів, тому додаткові множники шляхів

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1.$$

Остаточно можна записати:

$$W(s) = \frac{\sum_{i=1}^{2} P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{W_1 W_3 W_5 W_6 + W_2 W_3 W_5 W_6}{1 - W_3 W_5 W_4 + W_5 W_6 W_7}.$$

2.12 Моделі дискретних сигналів

Дискретні сигнали є послідовностями чисел, що визначають миттєві значення неперервного сигналу в дискретні моменти часу, як математичну модель такої послідовності розглядають послідовність δ-імпульсів нульової тривалості, площі яких рівні миттєвим значенням сигналу $X(t)$ в моменти kT, де T – крок дискретизації:

$$X_{\partial}(kT) = \sum_{k=1}^{n} X(t_k)\delta(t - k\mathrm{T}) . \tag{2.46}$$

Надалі таку послідовність будемо називати послідовністю модульованих дельта-імпульсів і позначати так: $x^*(t)$.

Модульована послідовність дельта-імпульсів має зображення по Лапласу і Фур'є, які також відзначатимуться зірочкою: $X^*(s)$ и $X^*(j\omega)$.

Згідно (2.46), процес дискретизації можна розглядати як процес модуляції вхідним неперервним сигналом тієї, що несе, у вигляді наступної послідовності δ-імпульсів:

$$\delta^*(t) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT) ,$$

тобто

$$x^*(t) = \delta^*(t) x(t). \tag{2.47}$$

Періодичну функцію $\delta^*(t)$ можна розкласти у ряд Фур'є:

$$\delta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{A}_k e^{jk\omega t}, \tag{2.48}$$

де $\omega = 2\pi/T$ – частота дискретизації. Спектр функції є лінійчастим з періодом ω.

Амплітуди гармонік обчислюються за формулою зворотного перетворення Фур'є. Враховуючи стробуючу дію δ-імпульсів, отримаємо:

$$\overline{A}_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta^*(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} e^0 = \frac{1}{T}. \tag{2.49}$$

Таким чином:

$$\delta^*(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega t}, \tag{2.50}$$

Підставимо це в (2.47):

$$x^*(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{jk\omega_{\text{кв}} t}, \tag{2.51}$$

Виконаємо перетворення Лапласа для дискретизованої функції:

$$X^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)\, e^{-iTs}. \tag{2.52}$$

Введемо нову змінну $z = e^{Ts}$. Тоді цей вираз може бути приведений до наступного зручнішого для використання виду:

$$X^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) z^{-i}. \tag{2.53}$$

Така формула дозволяє просто обчислювати зображення модульованих послідовностей дельта-імпульсів, користуючись таблицями дискретного z-перетворення, які можна знайти у підручниках і довідниках

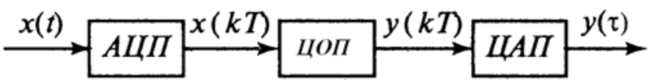
.

2.13 Моделі дискретних систем

Лінійні стаціонарні дискретні системи описуються різнісними рівняннями виду:

$$y(kT) + c_1 y[(k-1)T] + c_2 y[(k-2)T] + \ldots + c_r y[(k-r)T] = d_0 x(kT) + d_1 x[(k-1)T] + d_2 x[(k-2)T] + \ldots + d_l x[(k-l)T] \tag{2.54}$$

Загальна структурна схема обробки сигналів у КІСУ виглядає так:



Цифровий обчислювальний пристрій (ЦОП) формує чергове дискретне значення вихідного сигналу у момент часу $t = kT$, ґрунтуючись на значенні вхідного сигналу *x(kT)* в той же момент, а також на значеннях деякого числа попередніх значень входу і виходу x[(k–1)T], x[(k –2)T],..., x[(k–l)T], y[(k–1)T], y[(k–2)T],..., y[(k–r)T], які зберігаються у його пам'яті.

Виконавши розглянуте в п. 2.12 представлення дискретизованих сигналів, отримаємо з (2.54) імпульсну модель дискретної системи:

$$y^*(t)+c_1y^*(t-T)+\ldots+c_ry^*(t-rT)=d_0x^*(t)+d_1x^*(t-T)+\ldots+d_lx^*(t-lT).$$

Застосовуючи до цього рівняння перетворення Лапласа (тобто помноживши ліву і праву его частині на e^{st} і интеґруючи в межах від 0 до ∞, із заміною $z = e^{Ts}$ отримаємо:

$$(1+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+\ldots+c_rz^{-r})Y^*(z)=(d_0+d_1z^{-1}+d_2z^{-2}+\ldots+d_lz^{-l})X^*(z).$$

Передатна функція цієї системи має наступний вигляд:

$$W^*(z)=\frac{Y^*(z)}{X^*(z)}=\frac{d_0+d_1z^{-1}+\ldots+d_lz^{-l}}{1+c_1z^{-1}+\ldots+c_rz^{-r}}.$$

Зазвичай множенням чисельника і знаменника на z в позитивному ступені, чисельно рівному найбільшій негативній мірі в цьому виразі, його перетворюють у відношення поліномів з позитивними степенями z :

$$W^*(z)=\frac{b_0+b_1z+\ldots+b_mz^m}{a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n}.$$

Комплексна частотна характеристика імпульсної дискретної системи отримується з передатної функції W*(z) заміною $z = e^{jT\omega}$.

При заданій вхідній дії $x(kT)$, а також при заданих початкових умовах $y(-T)$, $y(-2T)$, ..., $y(-rT)$ рішення різницевого рівняння (2.54) може здійснюватися послідовно для кожного чергового моменту часу $t = 0$, $t = T$, $t = 2T$, ... за допомогою формули

$$y(kT)=d_0x(kT)+d_1x[(k-1)T]+\ldots+d_lx[(k-l)T]-c_1y[(k-1)T]-$$
$$-c_2y[(k-2)T]-\ldots-c_ry[(k-r)T], \tag{2.55}$$

Обчислення реакції $y(kT)$ дискретної системи на задану детерміновану числову послідовність $x(kT)$ з використанням перетворення Лапласа здійснюється так само, як і для безперервних систем: множенням зображення вхідної послідовності X*(z) на передатну функцію системи W*(z) знаходять зображення вихідної послідовності дельта--імпульсів:

$$Y^*(z)=W^*(z)X^*(z),$$

після чого здійснюють зворотне перетворення – по таблицях z-зображень знаходять можливу модулюючу функцію *y(t)*, яка після заміни $t \to kT$ дає послідовність дискретних значень виходу *y(kT)*.

Слід звернути увагу на те, що реально ніякої модулюючої функції *y(t)* на виході даної системи не існує; у розрахунку вона використовується як допоміжний засіб для опису вихідної послідовності дельта-імпульсів.

Як правило, при виконанні зворотного перетворення доводиться виконувати розкладання $Y^*(z)$ на суму простих дробів:

$$Y^*(z) = \sum_{k=1}^{q} \frac{C_k}{z - z_k},$$

де z_k – k-й полюс $Y^*(z)$; q – степінь полінома знаменника.

Коефіцієнти розкладання обчислюються за формулою,

$$C_k = (z - z_k) Y^*(z) \big|_{z = z_k}.$$

Для виконання розрахунків коефіцієнтів розкладання необхідно визначити корені характеристичного рівняння [полюси передатної функції] системи:

$$a_n z_n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0.$$