

## 2 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ

### 2.1 Комп'ютерне моделювання

*Комп'ютерне моделювання* — метод рішення задачі аналізу або синтезу складної системи на основі використання комп'ютерної програми, яка виконує розрахунки по математичній моделі системи. Суть комп'ютерного моделювання складається в отриманні кількісних і якісних результатів по математичній моделі. Якісні висновки, що отримуються при цьому, дозволяють виявити невідомі раніше властивості складної системи: її структуру, динаміку розвитку, стійкість, цілісність та ін. Кількісні висновки в основному носять характер прогнозу деяких майбутніх або пояснення минулих значень параметрів, що характеризують систему.

Розрізняють аналітичне і імітаційне моделювання. При аналітичному моделюванні вивчаються абстрактні математичні моделі реального об'єкта у вигляді алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь. Ці моделі передбачають однозначну обчислювальну процедуру, що призводить до точного рішення рівнянь. При імітаційному моделюванні досліджуються моделі у вигляді алгоритмів, що відтворюють функціонування досліджуваної системи шляхом послідовного виконання великої кількості елементарних операцій.

Процес моделювання починається з вивчення (обстеження) реальної системи, її внутрішньої структури і змісту взаємозв'язків між її елементами, а також зовнішніх дій і завершується розробкою моделі.

У загальному випадку моделювання проходить наступні етапи:

а) аналіз вимог до проектування:

- 1) постановка і аналіз завдання та мети моделювання;
- 2) збирання і аналіз попередньої інформації про об'єкт моделювання;
- 3) побудова концептуальної моделі, що є сукупністю припущень, взаємозв'язків і даних, які описують об'єкт дослідження;
- 4) перевірка достовірності концептуальної моделі;

б) розробка моделі:

- 1) вибір середовища моделювання;
- 2) складання логічної моделі як сукупності окремих модулів;
- 3) призначення модулям моделі властивостей;
- 4) завдання модельного часу і часового масштабу;
- 5) верифікація моделі;

в) проведення експерименту:

- 1) запуск і прогон моделі;
- 2) варіювання параметрів моделі і збір статистики відгуків моделі;
- 3) аналіз результатів моделювання;

г) підведення підсумків моделювання у відповідності до поставлених мети і завдання моделювання.

Нині на ринку програмного забезпечення, призначеного для комп'ютерного моделювання можна налічити десятки спеціалізованих пакетів. Розглянемо характеристики деяких з них.

*Програма Pspice.* Програма є модифікацією програми аналізу електронних кіл SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis). Нині її вважають стандартом моделювання електронних кіл і пристроїв. Моделі електронних компонентів у форматі SPICE використовуються більшістю інших програм моделювання схемотехніки.

Основні види аналізу, що реалізуються PSpice:

- розрахунок режиму по постійному струму;
- розрахунок перехідних процесів
- побудова спектрів сигналів;
- розрахунок частотних характеристик і спектральної густини шуму;
- багатоваріантний аналіз при зміні будь-яких параметрів схеми і температури;
- статистичний аналіз за методом Монте-Карло і розрахунок найгіршого випадку.

*Програма Multisim* (фірма National Instruments Corporation). Перші версії програми мали назву Electronics Workbench і розроблялися фірмою з однойменною назвою. Програма мала дуже простий і інтуїтивно зрозумілий графічний інтерфейс. Нині фірма Electronics Workbench є дочірньою компанією, якою повністю володіє фірма National Instruments Corporation. Останні версії програми використовують математичні модулі і моделі компонентів SPICE. Особливістю програми Multisim є наявність віртуальних вимірювальних приладів, що імітують реальні аналоги. До складу Multisim входять ефективні засоби графічної обробки результатів моделювання. Інша важлива особливість програми полягає в тому, що Multisim підтримує взаємодію з графічним середовищем LabVIEW, призначеним для розробки програмно-апаратних засобів виміру і управління.

*LabVIEW* (англ. **L**aboratory **V**irtual **I**nstrumentation **E**ngineering **W**orkbench — це середовище розробки і платформа виконання програм, написаних графічною мовою програмування "G" фірми National Instruments (США). Перша версія LabVIEW була випущена в 1986 році для Apple Macintosh, нині існують версії для UNIX, Linux, Mac OS і ін., а найбільш розвиненими і популярними є версії для Microsoft Windows.

LabVIEW використовується в системах збору і обробки даних, а також для управління технічними об'єктами і технологічними процесами. Ідеологічно LabVIEW дуже близька до SCADA -систем, але на відміну від них більшою мірою орієнтована на рішення завдань не стільки в галузі АСУ ТП, скільки в області автоматизації наукових досліджень.

*MathModelica*® є блок інструментальних засобів моделювання (toolbox) для відомої системи *Mathematica*®. розробляються шведською фірмою *MathCoreEngineering AB*®. Використовується для побудови реальних моделей і проектування фізичних систем.

Ця система є багатоцільовою математичною системою, яка дозволяє вирішувати велику кількість досить складних проблем без необхідності попереднього їх програмування. *Mathematica*® - одна з найпотужніших і розвиненіших систем у світі, що включає набір інструментальних засобів, що забезпечують ефективні аналітичні і чисельні обчислення, а також зручний призначений для користувача інтерфейс.

Пакет *MathModelica*® використовує мову *Modelica*®, якою описуються статичні і динамічні системи, що описуються рівняннями алгебри і звичайними лінійними і нелінійними диференціальними рівняннями. Є велика бібліотека готових моделей окремих елементів для механічних, електричних, теплових процесів та систем управління цими процесами.

*VisSim* — візуальна мова програмування, призначена для моделювання динамічних систем, а також проектування засобів з вбудованими мікропроцесорами. *VisSim* поєднує в собі характерний для Windows інтуїтивний інтерфейс для створення блокових діаграм і потужне моделююче ядро. Мова розроблена американською компанією *Visual Solutions*.

Мова і програмне середовище *VisSim* широко використовується в розробці систем управління і цифрової обробки сигналів для моделювання і дизайну. Вона включає блоки для арифметики, булевих і трансцендентних функцій, а також цифрові фільтри, передавальні функції, чисельної інтеграції і інтерактивного виводу.

Найбільш розвинені засоби моделювання систем управління має *універсальний пакет MATLAB*.

Система *MATLAB* розроблена фірмою *The MathWorks, Inc.* (США) і є системою інженерних і наукових розрахунків для різних галузей науки і техніки. Серед них:

- математичні обчислення;
- розробка алгоритмів;
- обчислювальний експеримент
- імітаційне моделювання;

- аналіз даних, і візуалізація результатів;
- дослідження в області автоматичного управління;
- статистична обробка сигналів і процесів та ін.

MATLAB включає ядро і ряд додаткових пакетів програм, так званих тулбоксов (TOOLBOX - ящик з інструментами).

Тулбокс є проблемно-орієнтованим набором функцій, які надають додаткові можливості для вирішення завдань, характерних для конкретної наукової галузі. Основними тулбоксами являються:

- "Системи управління" (ControlSystem);
- "управління (RobustControl) Робастное";
- "Оптимізація" (Optimization);
- "Ідентифікація систем" (System Identification);
- "Обробка сигналів" (Signal Processing);
- "Нейронні мережі" (NeuralNetwork).

Особливо слід виділити пакет Simulink, що спеціалізується на ефективному рішенні завдань управління.

Simulink є інтерактивним пакетом для моделювання і аналізу динамічних багатовимірних об'єктів і рішення динамічних завдань у реальному часі. У Simulink розглядаються моделі, що описуються лінійними і нелінійними звичайними диференціальними рівняннями, представленими як у неперервній, так і дискретній формі. Статичні залежності описуються лінійними і нелінійними рівняннями алгебри. У пакеті є велика бібліотека блоків, з яких можна набирати системи управління з різноманітними структурами.

## 2.2 Базові можливості системи MATLAB

### 2.2.1 Константи

Констата  $eps = 2.2204 \cdot 10^{-16}$  називається відносною точністю арифметики з плаваючою крапкою (floating-point relative accuracy).

Максимальне уявне дійсне число зберігається в константі  $realmax = 1.7977 \cdot 10^{308}$ , мінімальне позитивне нормалізоване дійсне число в змінній  $realmin = 2.2251 \cdot 10^{-308}$ .

Величини  $inf$ ,  $-inf$  служать для представлення  $\pm\infty$ . «Нечисло» позначається  $NaN$ .

Константа  $pi$  зберігає наближення до числа  $\pi$ .

Згадані константи  $eps$ ,  $realmax$ ,  $realmin$ ,  $Inf$ ,  $NaN$ ,  $pi$  для описаного вище використання повинні з'являтися в правій частині команди привласнення. Якщо вони стоять в лівій частині, наприклад

$pi = 2.5$ ,

то втрачають своє первинне значення. Повернути первинне значення зумовлених констант можна командою `clear`.

Відділення порядку числа від мантиси здійснюється символом  $e$ .

### 2.2.2 Змінні

Змінні використовуються для позначення даних, що зберігаються. Змінна має ім'я, зване ідентифікатором. Дані можуть міняти свої значення, а ідентифікатор залишається тим самим. У MATLAB кількість символів ідентифікатора обмежена і дорівнює 31.

Ім'я змінної починається з букви і може складатися з букв, цифр і деяких (допустимих) символів.

Комплексні числа представляються парою двох дійсних чисел. Змінні  $i$  та  $j$  представляють уявну одиницю. Тому, наприклад  $1+2*i$  це комплексне число  $1 + 2i$ .

Змінні  $i$  та  $j$  часто використовуються як лічильники в циклах. Після цього  $1 + 2*i$  буде вже не комплексним числом  $1 + 2i$ , а чимось іншим. Проте запис  $1 + 2i$  (ми опустили знак множення) завжди означає комплексне число  $1 + 2i$ .

Важлива особливість: при визначенні змінних не вимагається вказівки розмірності, що дає велику свободу поводження з даними.

### 2.2.3 Матриці

Усі дії MATLAB виконує, по суті, тільки з одним типом об'єктів - прямокутними матрицями (назва MATLAB є скорочення англійського словосполучення MATrix LABoratory — лабораторія матриць). Для представлення окремих чисел використовуються матриці з одного елемента.

Елементами матриць можуть бути цілі, речові або комплексні числа; скалярним значенням відповідають матриці розміру  $1 \times 1$ , а векторам - матриці з одним стовпцем або одним рядком.

Для завдання матриць вводяться складові їх числа рядок за рядком в квадратних дужках. Числа розділяються пропусками або комами, рядки розділяються крапкою з комою, наприклад:

```
A=[1 2 ; 3 4 ; 5 0];
```

```
V={7, 8, 1 ; 9, 0, 2 };
```

Тепер можна виконати множення введених матриць:

```
C=A * V
```

Усі три матриці A, B і C зберігаються в пам'яті і доступні для подальшого використання. Наприклад, останню матрицю можна транспонувати:

```
D=C'
```

Команда `length(C)` повертає кількість елементів матриці C.

Щоб вичислити визначника матриці, досить ввести рядок

```
d = det (C)
```

Вираження

```
V=a:b:c
```

створює вектор  $V$ , перший елемент якого рівний  $a$ , останній  $c$ , а різниця між сусідніми елементами рівна  $b$ . Цей вираз рівносильний наступному:

$$V = [a, a+b, a+2b, a+3b, \dots, c]$$

$M(i,j)$  вибирає елемент матриці  $M$ , що стоїть на перетині  $i$ -того рядка та  $j$ -го стовпця.

$M(:,j)$  вибирає  $j$ -й стовпець з матриці  $M$ .

$M(i,:)$  вибирає  $i$ -й рядок з матриці  $M$ .

Наступні функції призначені для створення деяких типових матриць.

zeros (m,n)	нульова матриця
ones(m,n)	матриця, що складається з одних одиниць
eye(m,n)	матриця з 1 на діагоналі і 0 поза діагоналлю
rand(m,n)	матриця з випадковими елементами, рівномірно розподіленими на відрізку [0,1]
randn{m,n)	матриця з випадковими елементами, розподіленими за нормальним законом з математичним очікуванням, рівним 0, і середнім квадратичним відхиленням, рівним 1.

До матриць можуть бути застосовані усі стандартні математичні функції: вони застосовуються покомпонентно до кожного елемента. На відміну від цих функцій операції, що означають символами, подібними  $+$ ,  $*$ , виконуються як матричні операції. Приведемо список операцій.

$a+b$	складання скалярів, векторів або матриць
$a-b$	віднімання скалярів, векторів або матриць
$a*b$	множення скалярів; матричне множення
$a.*b$	покомпонентне множення елементів матриць
$a^b$	піднесення скаляра або матриці до степеня
$a.^b$	піднесення кожного елемента матриці до степеня
$a/b$	ділення скалярів; праве ділення матриць, т.е. $a \times b^{-1}$
$a./b$	покомпонентне ділення елементів матриць
$a\b$	ліве ділення матриць, тобто $a^{-1} \times b$