1.3 Операції, що виконуються зі сигналами

1.3.1 Квантування сигналів

В аналогових пристроях сигнал $x(t)$ може приймати будь-які значення в певному діапазоні $[X_{\min}, X_{\max}]$. Такий неперервний сигнал неможливо безпосередньо завести у комп'ютер, інформація в якому представляється окремими числами. Для перетворення аналогових сигналів у цифрову форму здійснюються операції квантування, дискретизації у часі і кодування.

Квантування – це операція заміни поточних значень аналогового сигналу дозволеними значеннями. Для цього діапазон $[X_{\min}, X_{\max}]$ розбивається на ряд ділянок. Ширина ділянки q – константа, що називається номінальним ступенем квантування. Границі між ділянками являють собою дозволені або квантовані рівні. Пристрій, що зветься квантувателем, замінює згідно заданого алгоритму миттєве значення вхідного сигналу найближчим дозволеним рівнем.

Якщо всі ділянки однакові, то квантування називають рівномірним, а квантуватель – лінійним. Відомо, що робота будь-якого лінійного пристрою описується лінійним рівнянням перетворення:

$$Y(t) = k_s X(t), \tag{1.24}$$

де $Y(t)$ – вихідний сигнал, k_s – коефіцієнт перетворення.

У результаті квантування графік сигналу, що змінюється лінійно, замінюється ступінчастою кривою (рис. 1.7).

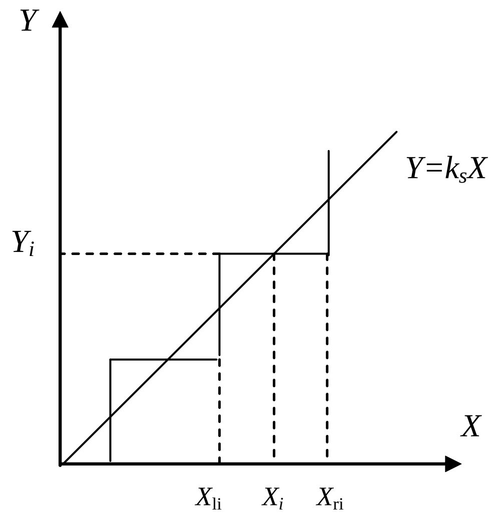

Рис. 1.7

Кожному з можливих значень Y_i (i = 1, 2, …, M) відповідає нескінчена сукупність $[X_{li},X_{ri}]$ значень вхідного сигналу квантувателя, де X_{li},X_{ri} – ліва та права границя *i*-ї сукупності. Ступінчаста крива має розриви у точках X_{li} та X_{ri} для всіх $1 \leq i < M$. Ця крива повинна найкращим чином приближатися до прямої (1.24). Під найкращим приближенням розуміється таке положення ступінчастої кривої, за якого абсолютне відхилення її від прямої (1.24) мінімальне, а значення вхідної величини Xi точно відповідає значенню квантованої величини Yi в середині інтервалу $[X_{li}, X_{ri}]$.

Ступінчаста крива може бути описана формулою

$$Y = k_s q \,\mathrm{Int}[X/q + 0{,}5\,\mathrm{Sign}X], \qquad (1.25)$$

де Int[A] – функція, що має назву “ціла частина A”; Sign A - функція, що має назву “знак числа A”. Остання функція може приймати такі значення:

$$\mathrm{Sign}\,A = \begin{cases} 1 \text{ для } A \geq 0 \\ -1 \text{ для } A < 0 \end{cases}$$

Функція перетворення (1.25) співпадає з (1.24), коли q наближається до нуля.

Для спрощення подальших викладок приймемо k_s=1. Тоді номінальна функція перетворення буде мати вигляд:

$$Y = X \qquad (1.26)$$

Ступінчаста крива, яка найкращим чином приближується до прямої (1.26), виражається формулою:

$$Y = q \,\mathrm{Int}[X/q + 0{,}5\,\mathrm{Sign}X], \qquad (1.27)$$

Формула (1.27) називається функцією перетворення ідеального квантувателя. Оскільки вона не співпадає з (1.26) при q>0, можна зробити висновок, що навіть ідеальний квантуватель вносить похибку перетворення. Абсолютна похибка Δ ідеального квантувателя дорівнює нулю в середині інтервалу $[X_{li}, X_{ri}]$ і досягає екстремальних значень на краях цього інтервалу (див. рис. 1.8)

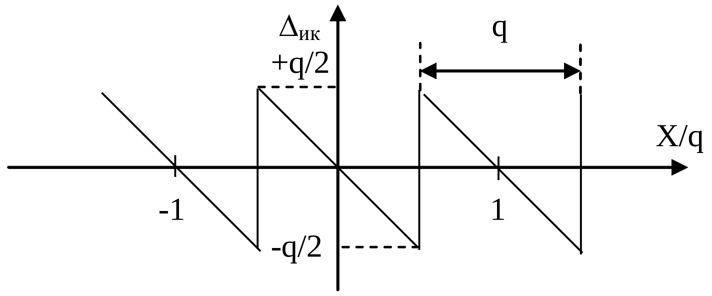

Рис. 1.8 – Графік абсолютної похибки квантувателя

Як бачимо, похибка ідеального квантувателя є періодичною функцією. Похибка ця відноситься до систематичних, бо змінюється за відомим законом. Але врахувати її в результаті квантування неможливо через те, що для її обчислення треба знати істинне значення сигналу. Тому похибку квантувателя прийнято вважати випадковою величиною з рівномірним законом розподілу. Для її визначення використовують звичайні числові параметри випадкової величини – математичне очікування і дисперсію. Математичне очікування похибки квантування дорівнює нулю, а дисперсія

$$D(\Delta) = \frac{q^2}{12} \tag{1.28}$$

Отже, дісперсія квантування у випадку достатньо великої кількості ступенів рівномірного квантування не залежить від закону розподілу ймовірностей вимірюваної величини.

Вираз (1.28) іноді називають потужністю шуму квантування.

1.3.2 Дискретизація сигналів

Одночасно з квантуванням за рівнем у КІСУ здійснюється і дискретизація сигналів у часі.

Дискретизація є перетворенням неперервного сигналу X(t) в послідовність миттєвих значень цього сигналу $X_д(kT_ц)$, відповідних певним моментам часу $kT_ц$ (де k = 1.2.3,…). Проміжок часу $T_ц$ між двома сусідніми моментами дискретизації називають кроком дискретизації.

Дискретизація неперервного у часі сигналу $X(t)$ є лінійною операцією множення функції $X(t)$ на функцію дискретизації у часі $\Delta^*(t)$:

$$X_\partial(t) = X(t) \cdot \Delta^*(t). \tag{1.29}$$

Функція $\Delta^*(t)$ є послідовністю одиничних імпульсів з періодом повторення $Tц$, тривалістю, рівною нулю і площею, рівною одиниці:

$$\Delta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\mathrm{T}_ц)\,. \tag{1.30}$$

Ідеальний дискретизирований сигнал математично представляють як послідовність імпульсів нульової тривалості, площі яких рівні миттєвим значенням сигналу $X(t)$ в моменти $kT_ц$.:

$$X_{\partial}(kT_{ц}) = \sum_{k=1}^{n} X(t_k)\delta(t - k\text{Т}_{\text{ц}})\,. \tag{1.31}$$

Розкладемо функцію дискретизації в ряд Фур'є у показовій формі:

$$\Delta*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi t}{T_ц}}\,. \tag{1.32}$$

Коефіцієнти c_k визначаться з співідношення:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_ц}{2}}^{\frac{T_ц}{2}} \delta(t) e^{jk\frac{2\pi t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_ц}. \tag{1.33}$$

Тоді дискретизований сигнал можна описати таким чином:

$$X_{\partial}(kT_ц) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_ц} X(t) e^{jk\frac{2\pi t}{T_ц}}\,. \tag{1.34}$$

Вираз для спектральної щільності можна знайти, якщо застосувати до (1.34) інтегральне перетворення Фур'є:

$$S_{\partial}(\omega) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega - k\frac{2\pi}{T_0})\,, \tag{1.35}$$

де $S(\omega)$ – спектральна щільність недискретизованого сигналу $X(t)$. Таким чином, спектр дискретизованого сигналу є лінійчастим з періодом $\frac{2\pi}{T_ц}$.

У дискретизированому сигналі відсутні проміжні значення, які мав первісний неперервний сигнал в проміжках між точками дискретизації. Але для багатьох операцій управління принципово необхідний неперервний сигнал. Виникає задача відновити в дискретизованому сигналі всі проміжні значення із заданою погрішністю.

Для відновлення використовується ряд Котельникова:

$$x_в(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_ц) S_a(t)\,, \tag{1.36}$$

який представляє неперервний сигнал сумою добутків миттєвих значень сигналу та деякої функції часу, званою функцією відліків:

$$S_a(t) = \frac{\sin\omega_c(t - kT_ц)}{\omega_c(t - kT_ц)}. \qquad (1.37)$$

Функція відліків являє собою реакцію ідеального фільтра нижніх частот на вхідний вплив у вигляді одиничної імпульсної функції. Ряд Котельникова можна використати для сигналів, що мають спектр з граничною частотою f_c і дискретизовані з періодом $T_ц = 1/(2f_c)$. Згідно теореми Котельникова сигнал, спектр якого обмежений частотою f_c, повністю визначається своїми миттєвими значеннями в дискретні моменти часу, різниця між якими

$$\Delta T \leq \frac{1}{2f_c}. \qquad (1.38)$$

Отже, якщо дискретизований з кроком $T_ц = 1/(2f_c)$ сигнал подати на вхід ідеального фільтра з верхньою межею пропущення f_c, то на виході отримаємо відновлений без похибок сигнал $X(t)$.

1.3.3 Фільтрація сигналів

Аналоговим фільтром називається частотно-селективне коло, яке забезпечує пропущення сигналів в одних смугах частот і подавлення в інших. Область частот, які фільтр пропускає, називають смугою пропущення або смугою прозорості, а область частот, в якій послаблення сигналу велике – смугою затримування або смугою непрозорості. Частота, що лежить на межі цих смуг, називається частотою зрізу $f_з$.

У залежності від розташування смуги прозорості на шкалі частот розрізнюють:

а) фільтри нижніх частот (ФНЧ), що пропускають без великого ослаблення коливання всіх частот нижче за частоту зрізу $f_з$;

б) фільтри верхніх частот (ФВЧ), що пропускають без великого ослаблення коливання всіх частот вище за частоту зрізу $f_з$;

в) смугові фільтри (СФ), що пропускають без великого ослаблення коливання смуги частот від частоти зрізу $f_{з1}$ до частоти зрізу $f_{з2}$.

г) загороджуючі або режекторні фільтри (РФ), що ослабляють коливання смуги частот від частоти зрізу $f_{з1}$ до частоти зрізу $f_{з2}$.

Ослаблення сигналу фільтром оцінюють відношенням напруги $U_{вх}$ на вході фільтра до напруги $U_{вих}$ на виході:

$$a = U_{вх} / U_{вих}. \qquad (1.39)$$

Часто це відношення виражають в децибелах:

$$b = 20 \lg (U_{вх} / U_{вих}) \qquad (1.40)$$

і називають загасанням фільтра, а залежність загасання фільтра від частоти – частотною характеристикою загасання.

Застосовується також інша характеристика фільтра – коефіцієнт передачі.

Ідеальні фільтри з чітко вираженою частотою зрізу не існують. У реальних фільтрах є смуга частот, в якій коефіцієнт передачі змінюється від максимального до мінімального або навпаки. Амплітудно-частотна характеристика реального фільтра низьких частот показана на рис. 1.9.

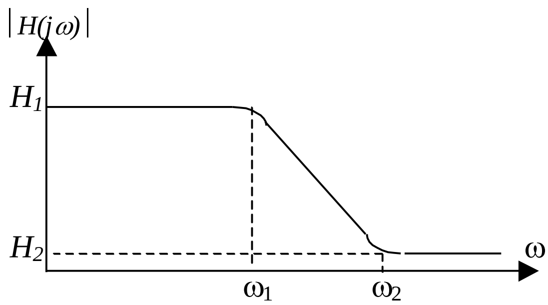

Рис. 1.9

Як параметри реального фільтра розглядаються межі смуг пропущення ω_1 і затримування ω_2, коефіцієнт передачі у смузі пропущення H_1.і загасання у смузі затримування H_2.

Цифровим фільтром називається пристрій чи програма, або змішана апаратно-програмна структура, яка використовується для цифрової обробки сигналів з метою отримання вихідних сигналів, що мають задані частотні характеристики.

При цьому використовуються характеристики сигналів у часовій і частотній областях та їх взаємне перетворення. Для дискретизированого сигналу з періодом дискретизації T спектральна характеристика визначається формулою дискретного перетворення Фур'є:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(nT) e^{-j\frac{2\pi}{Nkn}}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1, \qquad (1.41)$$

де N – загальне число відліків сигналу.

Відновлення сигналу виконується згідно формули зворотного дискретного перетворення Фур’є:

$$X(nT) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S(k)e^{-j\frac{2\pi}{Nkn}}, \quad n = 0,1,\ldots, N-1. \tag{1.42}$$

Вираз (1.42) називають імпульсною характеристикою фільтра, бо він описує послідовність імпульсів на виході фільтра..

За характером імпульсної послідовності на виході фільтри поділяються на:

а) фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ), для яких число відліків n кінечне, тобто $N_1<n<N_2$;

б) фільтри з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ), для яких число відліків n нескінченне, тобто $-\infty<n<N_2$ або $N_1<n<\infty$.

Для будь-якої лінійної дискретної системи залежність значень вихідної величини Y від значень вхідної величини X описується різносним рівнянням

$$\sum_{k=0}^{N} b_k Y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} a_r X(n-r). \tag{1.43}$$

Прийнявши b_o=1, перетворюємо останнє співвідношення:

$$Y(n) = \sum_{r=0}^{M} a_r X(n-r) - \sum_{k=1}^{N} b_k Y(n-k)\,. \tag{1.44}$$

Підбираючи значення коефіцієнтів a_r і b_k, можна отримати бажану частотну характеристику вихідної величини Y, тобто вираз (1.44) може бути використаний для створення цифрового фільтра. Згідно з цим виразом, для визначення $Y(n)$ необхідно знати попередні значення $Y(n\text{-}k)$. Таким чином, функція (1.44) є рекурсивною, оскільки визначається через саму себе. Відповідно і фільтри, що реалізовують такий алгоритм, називаються рекурсивними фільтрами.

Для спрощення іноді не враховують попередні значення величини Y:

$$Y(n) = \sum_{r=0}^{M} a_r X(n-r). \tag{1.45}$$

Фільтри, що реалізовують алгоритм (1.45), називаються нерекурсивними.

Згідно (1.45), вихідний сигнал ЦФ можна представити у вигляді суми зсунутих у часі імпульсів, амплітуди яких відповідають амплітудам дискретних відліків сигналів на вході фільтра. Відповідно до цього цифровий фільтр можна створити, використовуючи набір пристроїв затримки сигналів у часі і суматор, на який вхідні сигнали подаються з вагою a_o, $a_1, \ldots, a_м$ (рис. 1.10, а). Оскільки число пристроїв кінцеве, то такий фільтр є нерекурсивним КІХ-фільтром. На рис. 1.10, б) показана структурна схема рекурсивного НІХ-фільтр. Відліки вихідного сигналу формуються як сума затриманих відліків з вагою b_1, b_2,… і т.д., які через суматор знов подаються на пристрої затримки. Процес може тривати нескінченно, звідки і назва фільтра.

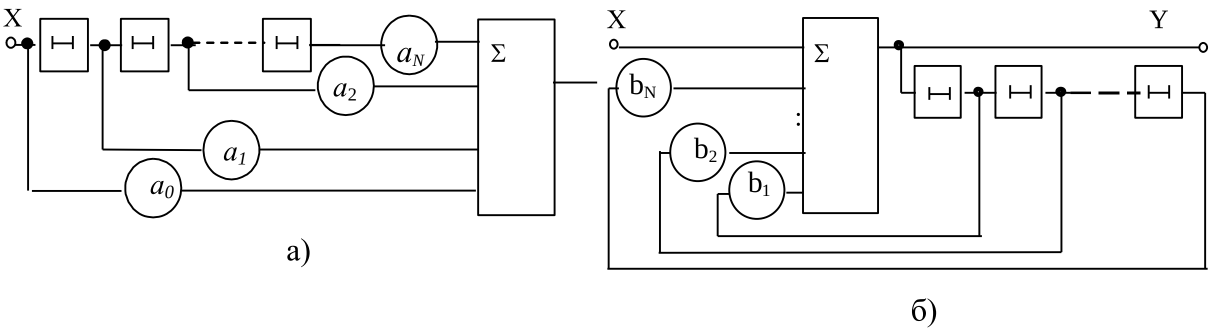

Рис. 1.10

1.3.4 Модуляція сигналів

У широкому значенні модуляція [лат. modulatio – мірна, розмірність] – це віддзеркалення або нанесення інформації на носій або переносник інформації. Це розуміють як завдання деякого розміру носієві.

У вузькому значенні модуляція – це зміна одного або декількох параметрів носія за допомогою сигналу, що несе інформацію. Зворотна операція, тобто виділення інформаційного сигналу з модульованого сигналу, називається демодуляцією.

Модуляцію можна розглядати як процес зміни одного або декількох параметрів високочастотного модульованого коливання під впливом відносно низькочастотного модулюючого сигналу. В результаті спектр сигналу, що управляє, залишається тієї ж форми, але переноситься в область більш високих частот, де передача електромагнітних сигналів більш ефективна. Часто роль переносника інформації виконує високочастотне коливання, зване «та, що несе». Як та, що несе, можуть бути використані коливання різної форми (прямокутні, трикутні і т. д.), проте найчастіше застосовуються гармонійні коливання. Залежно від того, який з параметрів синусоїдального коливання змінюється, розрізняють амплітудну, частотну і фазову модуляцію. Модуляція дискретним сигналом називається цифровою модуляцією або маніпуляцією.

Амплітудна маніпуляція (АМн; англ. Amplitude Shift Keying – ASK) – модуляція, при якій стрибкоподібно міняється амплітуда несучого коливання. Наприклад, телеграфні сигнали (азбуку Морзе) передають за допомогою амплітудної маніпуляції. Амплітуда високочастотного сигналу приймає тільки два значення: увімкнено і вимкнено (рис. 1.11).

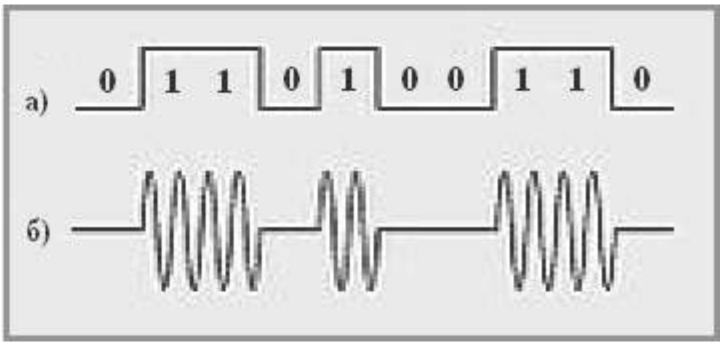

Рис. 1.11 – Амплітудна маніпуляція:

а) модулюючий сигнал; б) модульований сигнал

Математично операція амплітудної модуляції еквівалентна множенню сигналу частоти, що несе, на сигнал даних.

При *частотній маніпуляції* (ЧМн, англ. Frequency Shift Keying – FSK) значенням "0" і "1" інформаційної послідовності відповідають дві різні частоти синусоїдального сигналу при незмінній амплітуді (рис. 1.12). Різниця між цими частотами називається частотним зсувом.

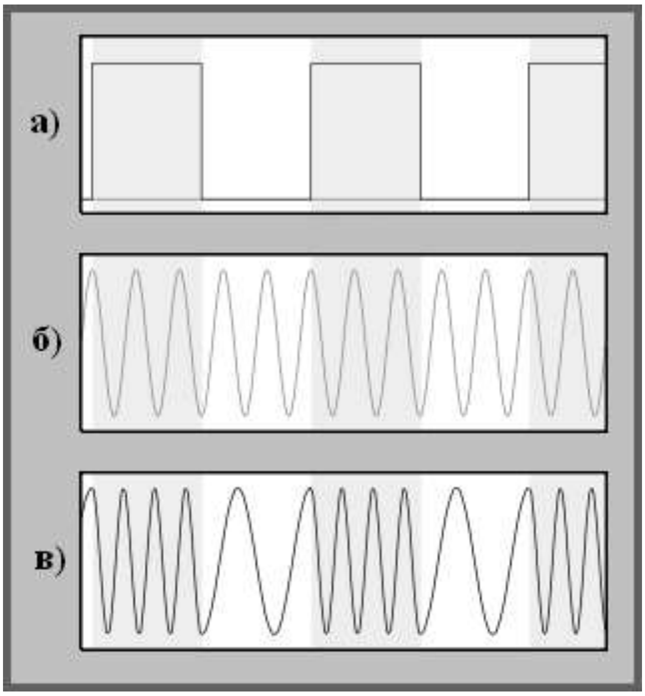

Рис. 1.12 – Частотна маніпуляція: а) модулюючий сигнал; б) та, що несе; в) модульований сигнал

Операція модуляції еквівалентна підсумовуванню виходів двох різних ASK модуляторів: одні на оригінальному сигналі і першій тією, що несе, інший - на сигналі, інверсному до оригінального і другій тією, що несе (рис. 1.13).

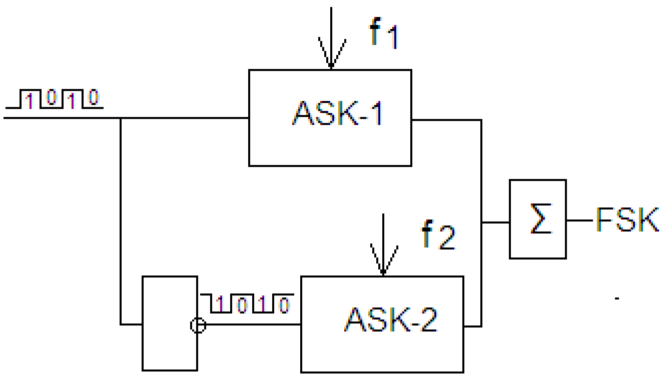

Рис. 1.13 – Схема формування FSK

Частотна маніпуляція є завадостійкою, оскільки завади у каналу передачі спотворюють в основному амплітуду, а не частоту сигналу. Проте при частотній маніпуляції неекономно витрачається ресурс смуги частот каналу передачі. Тому цей вид модуляції застосовується лише в низькошвидкісних каналах передачі.

Фазова маніпуляція (англ. Phase Shift Keying – PSK) була розроблена на початку розвитку програми дослідження дального космосу; зараз схема PSK широко використовується в комерційних і військових системах зв'язку. При

PSK частота і амплітуда сигналу, що несе, залишаються незмінними, а відбувається фазовий зсув кожного разу, коли передається біт даних. Фазоманіпульований сигнал описується наступним чином:

$$x(t) = \cos(\omega_c t + \frac{m_n(t)\Delta\varphi}{2}), \qquad (1.46)$$

де $m_n(t)$ – сигнал даних; $\Delta\varphi=\pi/n$, n – число рівнів сигналу даних. У найпростішому випадку значенню 1 відповідає позитивний півперіод на початку циклу, а значенню 0 - негативний.

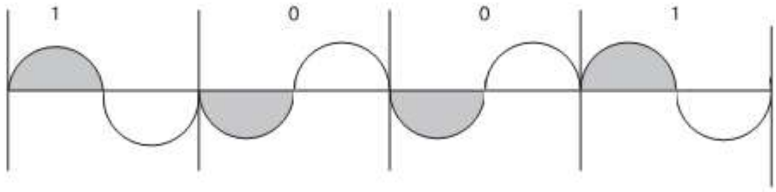

Рис. 1.14 – Фазова маніпуляція (сірим кольором відмічений момент аналізу фази)

Для передачі одного біту достатньо одного періоду коливань, отже, швидкість передачі вища,ніж при ASK та PSK.

У одних PSK схемах зсув проводитися кожного разу на 180°, в інших - на 90° при передачі нуля і на 270° при передачі одиниці.

Квадратурна модуляція або *квадратурна амплітудна модуляція* (КАМ, англ. Quadrature Amplitude Modulation – QAM) – різновид амплітудної модуляції сигналу, що є сумою двох несучих коливань однієї частоти, але зсунутих по фазі одне щодо одного на 90°, кожне з яких модульоване по амплітуді своїм модулюючим сигналом:

$$S_{QAM}(t) = I(t)\cos(2\pi f_0 t) + Q(t)\sin(2\pi f_0 t), \qquad (1.47)$$

де $I(t)$ і $Q(t)$ – модулюючі сигнали; f_0 – сигнал частоти, що несе.

При квадратурній модуляції змінюються як фаза, так і амплітуда сигналу, це дозволяє збільшити кількість інформації, що передається.

Імпульсно-кодова модуляція (ІКМ або англ. Pulse Code Modulation – PCM) використовується для оцифровки аналогових сигналів. Практично всі види аналогових даних (відео, голос, музика, дані телеметрії, віртуальні світи) допускають застосування PCM.

Щоб отримати на вході каналу зв'язку ІКМ-сигнал з аналогового, миттєве значення аналогового сигналу вимірюється через рівні проміжки часу і перетворюється в цифровий код. Згідно теореми Котельникова кількість оцифрувань за секунду (або швидкість оцифровки, частота дискретизації) повинна бути не нижче за 2-кратну максимальну частоту в спектрі аналогового сигналу. Миттєве значення аналогового сигналу квантується, кількість рівнів квантування завжди береться кратною ступеню двійки, наприклад, 16, 32, 64 або 256. Відповідно номер рівня квантування може бути представлений 4, 5, 6 або 8 бітами. Таким чином, на виході ІКМ-модулятора маємо набір бітів. На приймальному кінці каналу зв'язку демодулятор перетворить послідовність бітів в імпульси, які використовуються для відновлення аналогового сигналу в цифро-аналоговому перетворювачі (ЦАП).

Широтно-імпульсна модуляція (ШІМ, англ. Pulse-Width Modulation – PWM) передбачає, що як та, що несе, використовується періодична послідовність прямокутних імпульсів, а інформативним параметром є тривалість цих імпульсів. Періодична послідовність прямокутних імпульсів однакової тривалості має сталу складову, прямо пропорційну їх тривалості, тобто обернено пропорційну шпаруватості імпульсів. Пропустивши імпульси через ФНЧ з частотою зрізу, значно меншою, ніж частота слідування імпульсів, можна легко виділити цю постійну складову. Якщо тривалість імпульсів змінюється, ФНЧ має на виході напругу, що відстежує закон зміни тривалості імпульсів. Таким чином, за допомогою ШІМ можна створити нескладний ЦАП: значення відліків сигналу кодуються тривалістю імпульсів, а ФНЧ перетворить імпульсну послідовність в плавно змінний сигнал.

Недоліком ШІМ є обмеження на відстань передачі сигналів. Оскільки інформацію несе тривалість імпульсу τ, то спотворення фронтів імпульсу приводить до погрішності передачі інформації. На виході довгої лінії зв'язку за рахунок обмеженої смуги її пропущення Δf отримують замість прямокутного трапецеїдальний імпульс з тривалістю фронту $t_Ф \approx 1/\Delta f$. Внаслідок наявності порогу спрацьовування приймача в ньому формується імпульс тривалістю $\tau^* < \tau$, що створює погрішність передачі інформації.

Фазо-імпульсна модуляція сигналу (ФІМ, англ. PPM – Pulse-Position Modulation) здійснюється шляхом затримки (або випередження) появи імпульсу на якийсь час, відповідний значенню інформативного сигналу.

При фазо-імпульсній модуляції кодування інформації полягає в зміні позиції імпульсів в групі імпульсів, яка називається кадром. У найпростішому випадку використовуються три імпульси: стартовий, інформаційний і стоповий. Спотворення фронтів не приводить до погрішності передачі інформації, як у випадку ШІМ. Але апаратура для модуляції і демодуляції ФІМ-сигналів значно складніша.

1.3.5 Кодування сигналів

Кодування – це операція перекладу за певними правилами деякого формального об'єкта у сукупність кодових символів деякого алфавіту. Як кодові символи використовують букви алфавіту, цифри в певній системі числення і різні умовні знаки. Зворотна операція називається декодуванням. Числове кодування є відображенням деякого формального об'єкта числами.

У КІСУ використовується кодове представлення технологічної і управлінської інформації для цифрової обробки і для передачі по каналах зв'язку. Кодується значення фізичної величини, що складається з її розміру і одиниці вимірювання. Ці характеристики представляються у вигляді чисел у тій або іншій системі числення.

Системою числення називається метод представлення кількісної інформації за допомогою символів, званих цифрами.

У непозиційній системі числення числове значення символа не залежить від його місця в числі. Прикладом є одинична або унітарна система, в якій цілі числа представляються у вигляді сукупності одиниць, повторюваних відповідне число разів. Сигнали, що описуються одиничною системою, являють собою сукупність імпульсів, кількість яких пропорціональна величині, що вимірюється. Такими є сигнали від датчиків кількості розфасованої продукції, а також від чутливих елементів лічильників витрати.

Для компактного представлення чисел використовуються позиційні системи числення, які мають алфавіт з декількох цифр, що мають певне числове значення або вагу, причому значення числа залежить від положення цифр в числі.

У позиційній системі будь-яке число N виражається в наступній формі:

$$N = \sum_{i=1}^{l} a_i B^{l-1}, \tag{1.49}$$

де a_i (i=1…l) – цифри даної системи числення, що стоять в i-тому розряді числа. Величина B означає основу системи і є рівною числу символів або знаків в даній системі. Цифри в позиційній системі починаються з нуля, найбільше значення цифри є рівним B–1. Буквою l позначений номер старшої позиції або кількість розрядів числа.

Збільшення основи системи числення B дає більш компактне представлення числа, але вимагає більшої кількості різних цифр, що ускладнює системи передачі і обробки кодів. Найпростішою для технічної реалізації є двійкова система. Але числа, записані у двійковій системі, важкі для сприйняття людиною. Як компроміс використовується двійково-десяткова система, в якій кожний десятковий розряд представлений чотирьохрозрядним двійковим числом.