1.2 Сигнали та їх моделі

1.2.1 Поняття сигналу

Сигнал – це матеріальний носій інформації. У відповідності з фізичною природою процесу, що використовується для передачі інформації, сигнали називають електричними, пневматичними, гідравлічними, світловими і звуковими.

Сигнали представляють у часовій або частотній області.

Часова область зручна при зображенні змін сигналу *в часі*. Ми усі знаємо, що таке синусоїда. Кожна синусоїда характеризується трьома параметрами: амплітудою, початковою фазою і частотою. *Одна* синусоїда має *одну* частоту. *Частота* – це параметр, що показує як часто сигнал повторює сам себе. Зворотним частоті є *період*. Він відповідає часу, через який сигнал повторює сам себе. На графіках рис. 1.1 показані дві синусоїди з різними частотами і, отже, різними періодами.

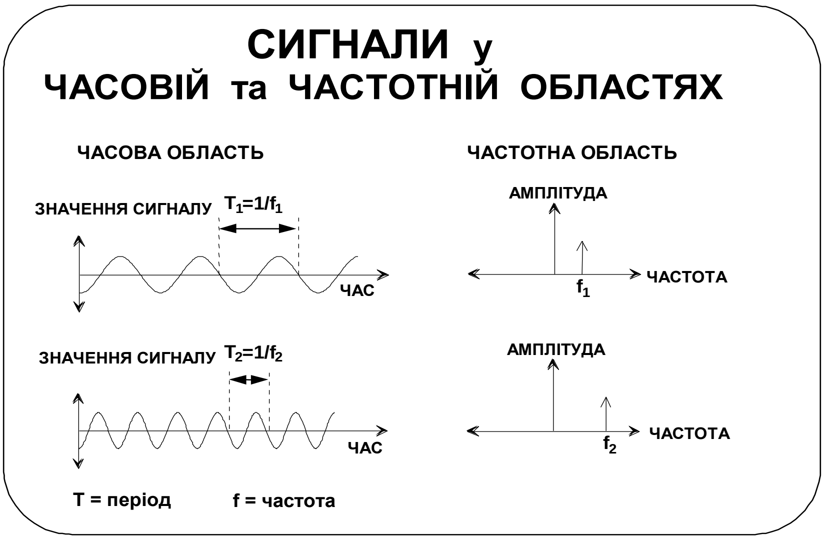

Рис. 1.1

Частотна область зручна для зображення частотного складу сигналів. По осі абсцис відкладається частота, а по осі ординат амплітуда або початкова фаза. Кожна синусоїда представляється вертикальною лінією, висота якої є пропорційною амплітуді або початковій фазі синусоїди в часовій області. Частота f_1 відповідає частоті першої синусоїди, а f_2 – другої. Чим вище частота синусоїди, тим далі від початку координат частот вона розташовується.

Частотну характеристику часто називають спектром сигналу. Спектри бувають частотні і фазові.

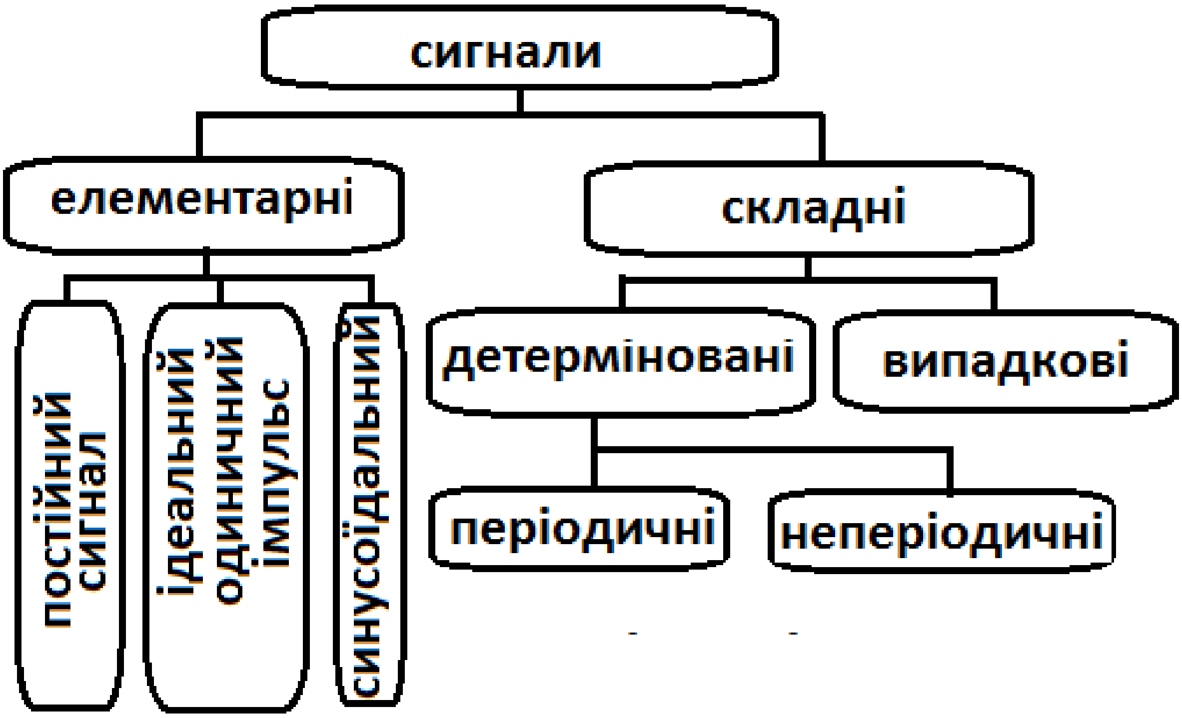

Рис. 1.2 – Класифікація сигналів

1.2.2 Елементарні сигнали

Найпростішим елементарним сигналом є постійний сигнал, незмінний у часі. Його модель x=const. Постійний сигнал має тільки один параметр – його значення *x*.

Часова та частотна характеристики постійного сигналу показані на рис. 1.3.

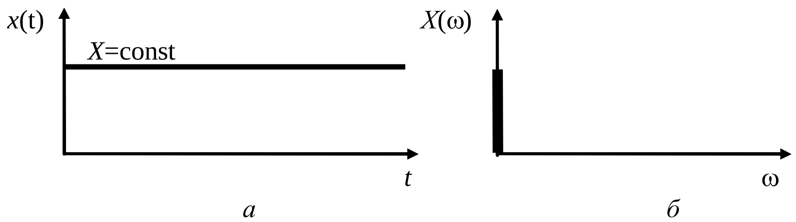

Рис. 1.3 – Характеристики постійного сигналу: а — часова; б — частотна

Другий елементарний сигнал — ідеальний одиничний імпульс, який описується дельта-функцією:

$$\delta(t - t_д) = \begin{cases} 0 \text{ коли } t \neq t_д \\ \infty \text{ коли } t = t_д \end{cases} \tag{1.1}$$

де $t_д$ — момент дії імпульсу.

Цей сигнал також має один параметр — момент його дії $t_д$.

Інтеграл від добутку будь-якого сигналу x(t) та дельта-функції дорівнює значенню цього сигналу в момент дії імпульсу $t=t_д$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\delta(\mathrm{t}-\mathrm{tд})dt = x(t)\big|_{t=\mathrm{t_д}} = x(\mathrm{t_д}). \tag{1.2}$$

Це означає, що дельта функція має стробуючу дію, тобто вибирає з неперервного сигналу його миттєві значення в моменти $t_д$. Така властивість використовується для представлення дискретизованих сигналів.

Інтеграл від дельта-функції являє собою одиничну функцію

$$1(\mathrm{t}-\mathrm{t_д}) = \begin{cases} 0 \text{ коли } \mathrm{t} < \mathrm{tд} \\ 1 \text{ коли } \mathrm{t} \geq \mathrm{tд} \end{cases} \tag{1.3}$$

Відповідно похідна одиничної функції є дельта-функцією.

Третій елементарний сигнал — синусоїдальний або гармонійний:

$$x = X_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{1.4}$$

Він визначається трьома параметрами: амплітудою X_m , частотою ω (або періодом T=2π/ω) та початковою фазою φ. Часова характеристика та спектр синусоїдального сигналу показані на рис. 1.1

Усі інші сигнали можуть бути представлені як комбінація елементарних.

1.2.3 Складні квазідетерміновані сигнали

Періодичні сигнали повторюють свої значення через інтервал часу *T*, який називається періодом. Вони можуть бути описані періодичною функцією:

$$x(t)= x(t \pm kT), \tag{1.5}$$

де *k*=1,2,3...

Періодична функцією часу, яка на заданому інтервалі має скінчене число максимумів і мінімумів, неперервна всюди, крім скінченного числа точок, в яких вона має розриви першого роду, може бути представлена рядом Фур'є, який має кілька форм представлення, наприклад

$$f(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau), \tag{1.6}$$

де τ = 2π*t*/*T* – відносний час.

Для практичних задач більш зручною є косинусна форма:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \qquad (1.7)$$

де $a_0/2$ – стала складова функції; $a_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ – змінна k-та гармонічна складова функції, $a_k, k\omega_0, \varphi_k$ – амплітуда, частота і початкова фаза k-тої гармонічної складової; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – частота основної (першої) гармонічної складової; T – період функції $X(t)$.

Таким чином, періодичний сигнал може бути представлений як сукупність елементарних синусоїдальних складових, які називаються гармоніками сигналу.

Процес розкладу періодичної функції на гармоніки носить назву гармонічного аналізу. Сукупність амплітуд і частот гармонічних складових являє собою спектр амплітуд. Особливістю спектра періодичного сигналу є його дискретність. Відстань між сусідніми лініями спектра однакова і дорівнює частоті ω_0.

Таким чином, спектр періодичного сигналу є лінійчастим, кожній гармоніці відповідає своя лінія спектру (рис. 1.4).

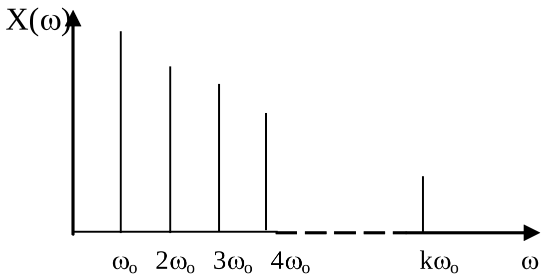

Рис. 1.4 – Спектр періодичного сигналу

Показова форма розкладання функції у ряд Фур’є має вигляд:

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad (1.8)$$

де $\dot{a}_k$ – комплексна амплітуда гармонічної складової, що має частоту $\omega_k = k\omega_0$.

Комплексна амплітуда визначається за допомогою формули:

$$\dot{a}_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt. \qquad (1.9)$$

Неперіодичний сигнал можна розглядати, як періодичний, у якого період Т наближається до нескінченності. Із збільшенням Т різниці частот сусідніх складових спектру зменшуються до нескінченно малої величини dω, а ряд Фур'є перетворюється у інтеграл Фур'є:

$$x(\tau) = \int_0^\infty \left[a(\omega)\cos\omega\tau + b(\omega)\sin\omega\tau\right]d\omega. \tag{1.10}$$

Відстань між гармоніками зменшується до нуля. Таким чином, лінійчастий спектр неперіодичного сигналу перетворюється в неперервну функцію.

Інтеграл Фур'є може бути представленим в показовій формі

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega, \tag{1.11}$$

де

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau, \tag{1.12}$$

Функція $S(j\omega)$ називається спектральною щільністю сигналу.

Формула (1.9) дозволяє отримати комплексний спектр сигналу, що враховує залежність від частоти і амплітуд, і фаз гармонік. При цьому амплітудно-частотна і фазочастотна характеристики сигналу визначаються як модуль та аргумент спектральної щільності:

$$F(\omega) = \left|S(j\omega)\right|, \tag{1.13}$$

$$\Phi(\omega) = \arg[S(j\omega)]. \tag{1.14}$$

1.2.4 Випадкові сигнали та їх характеристики

Випадковим називають сигнал, який в ході його аналізу може приймати той або інший вигляд, при чому невідомо, який саме.

Але з тією або іншою вірогідністю можна прогнозувати, яке значення може прийняти випадковий сигнал, якщо відомі його ймовірнісні характеристики. Повний опис випадкового сигналу закон розподілу ймовірностей його значень. Проте вважається, що в багатьох випадках такі сигнали можна характеризувати трьома параметрами:

а) математичне очікування або момент першого порядку

$$m_X = M_1[X] = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(X) dX \ , \tag{1.15}$$

де $f(X)$ – густина ймовірності випадкової величини X;

б) дисперсія або момент другого порядку

$$D_X = M_2[X] = M_1[(X - m_X)^2]; \tag{1.16}$$

в) кореляційна функція, що визначається для двох перерізів випадкового процесу t_1 та $t_2 = t_1 + \tau$

$$K_X(t_1, t_2) = M_1[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))] \tag{1.17}$$

або нормована кореляційна функція

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{K_X(t_1, t_1) K_X(t_1, t_1)}}. \tag{1.18}$$

Конкретний вигляд, який приймає сигнал під час його дослідження, називається реалізацією випадкового сигналу, а його математичний опис – вибірковою функцією. В результаті ряду випробувань отримують сімейство реалізацій сигналу. Таке сімейство реалізацій прийнято називати ансамблем реалізацій. Задаємо момент часу t_1, однаковий для усіх реалізацій ансамблю, сукупність значень вибіркових функцій у цей момент являє собою статистичну вибірку, яку називають перерізом випадкового процесу (рис. 1.5)

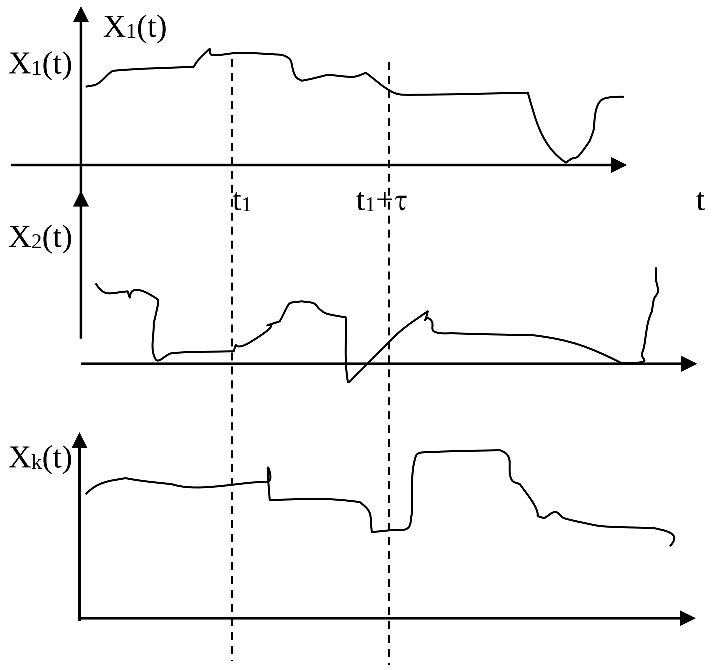

Рис. 1.5 – Реалізації випадкового сигналу

Переріз випадкового сигналу по ансамблю реалізацій є випадковою величиною. Чим більше реалізацій сигналу буде досліджено, тим точніше можна описати випадковий сигнал.

Якщо закон розподілу випадкового сигналу не змінюється у часі, то такий сигнал називається стаціонарним. Для більшості стаціонарних сигналів статистичні характеристики, отримані для перерізу по ансамблю реалізацій, є ідентичними характеристикам, які отримані на основі однієї реалізації достатньої подовженості у часі. Такі сигнали називаються *ергодичними*.

Якщо в загальному випадку статистичні характеристики сигналів отримують осередненням по ансамблю реалізацій, то такі ж характеристики ергодичних стаціонарних сигналів отримують осередненням у часі по наступним формулам:

а) середнє значення випадкового сигналу:

$$\mathrm{m}_1[\mathrm{X(t)}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt, \tag{1.19}$$

де T – час спостереження сигналу;

б) середнє значення квадрату випадкового сигналу:

$$\mathrm{m}_2[\mathrm{X(t)}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt\ ; \tag{1.20}$$

в) автокореляційна функція:

$$\mathrm{R}_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt. \tag{1.21}$$

Стаціонарні ергодичні сигнали характеризують двома складовими: постійною та змінною. Постійна дорівнює середньому значенню сигналу згідно (1.19). Змінна складова – це відхилення поточних значень сигналу від математичного очікування. Вона оцінюється дисперсією, яка характеризує розсів значень сигналу відносно до середнього значення і розраховується як середнє значення квадрата відхилення сигналу від його середнього значення:

$$\mathrm{D}[\mathrm{X(t)}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \{x(t) - m_1[X(t)]\}^2 dt = m_2[X(t)] - m_1^2[X(t)], \tag{1.22}$$

Випадковий сигнал, як і детермінований, можна розкласти у ряд Фур'є або застосувати до нього інтегральне перетворення Фур'є, тобто представити цей сигнал як сукупність гармонік. Амплітуди гармонік будуть випадковими величинами, які можна характеризувати математичним очікуванням і дисперсією. Більш цікавою є дисперсія, оскільки вона характеризує енергію сигналу. Дисперсія сигналу розподілена по гармоніках. Це можна графічно проілюструвати, як спектр дисперсій (рис. 1.6).

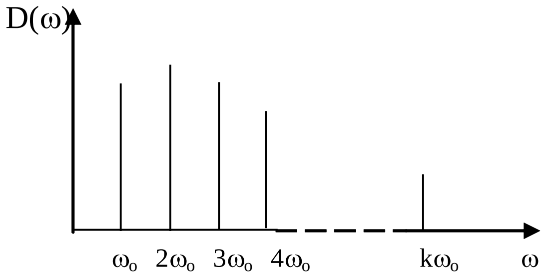

Рис. 1.6 – Спектр дисперсій випадкового сигналу

При переході від ряду Фур'є до інтегралу Фур'є дискретний спектр замінюється неперервним. Спектр неперіодичного випадкового сигналу представляють як графік густини розподілу дисперсій по частотах. Кожному як завгодно малому інтервалу частот dω відповідатиме елементарна дисперсія dD(ω) (рис. 1.7). Загальна дисперсія сигналу дорівнює площі під кривою спектральної густини.

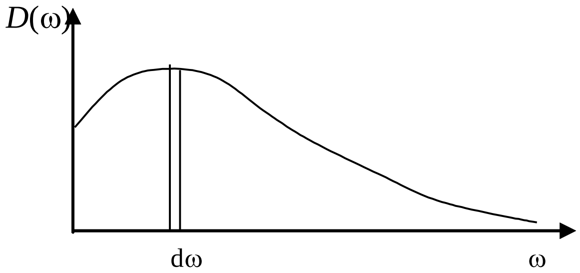

Рис. 1.7 – Спектральна густина

Спектральну густину дисперсії знаходять застосуванням перетворення Фур'є до кореляційної функції :

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{1.23}$$